ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ

ಭಾಗ–2

ಡಿ ಎಸ್ ಗುಂಡೂರಾವ್

1979

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು-24

ಪ್ರಕಟಣೆ : 142

ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ
(ಭಾಗ - 2)

ಡಿ. ಎಸ್. ಗುಂಡೂರಾವ್

ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು (ಗಣಿತ)
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

1984

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು - 560065

ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ–2)–(ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದಿಂದ ಸಿದ್ಧಗೊಂಡು, ಸಂಪಸ ಸಮಿತಿ ಪ್ರಕಾಶಿತ), ಪ್ರಥಮ ಮುದ್ರಣ 1984 ಪ್ರತಿಗಳು 1000, ಪುಟಗಳು viii + 202

ಬೆಲೆ: ಸಾದಾಪ್ರತಿ ರೂ. 20–00 ಕ್ಯಾಲಿಕೊಪ್ರತಿ ರೂ. 30–00

ಮುದ್ರಣ :
ಸಪ್ನ ಪ್ರಿಂಟಿಂಗ್ ಪ್ರೆಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು–26.

ಕುಲಪತಿಗಳ ಹಾರೈಕೆ

ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಾಹಿತ್ಯದ ಎರಡನೆಯ ಘಟ್ಟದಲ್ಲಿ ನಾವಿಂದು ಇದ್ದೇವೆ. ಈಗಾಗಲೇ ನೂರಕ್ಕೆ ಮಿಕ್ಕಿ ಹೊತ್ತಗೆಗಳು ಪ್ರಕಟಗೊಂಡಿವೆ. ಹತ್ತಾರು ಎರಡನೆಯ ಮುದ್ರಣಗೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. ಇದು ಈ ಗ್ರಂಥಗಳ ಉಪಯುಕ್ತತೆ ಹಾಗೂ ಜನಮೆಚ್ಚುಗೆಯ ದ್ಯೋತಕ.

ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನಗಳು ಹಲವಾರು. ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಅಪಾರ. ಅವುಗಳ ಮಹತಿ ಹೆಚ್ಚಿನದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಇತ್ತೀಚಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಜ್ಞಾನಸಂಪತ್ತು ಒಂದು ಮೇರುಪರ್ವತ. ಅದರ ಪ್ರಯೋಜನ ನಾಡಿಗರಿಗೆ ಹಾಗೂ ನಾಡಿಗೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆದಾಗ, ದೇಶದಲ್ಲಿ ಪುಷ್ಟಿ-ತುಷ್ಟಿ, ಭದ್ರತೆ-ಭವ್ಯತೆ, ಸುಖ-ಶಾಂತಿಗಳು ನೆಲೆಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೃಷಿಯ ಸಂದೇಶ ಹರಡಲನುವಾಗುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ದೇಶಸೇವೆಯ ಮಹತ್ ಕಾರ್ಯಗಳು.

ಒಂದು ದಶಕದ ಹಿಂದೆ ನೋಳೆತ ಪೈರು, ಇಂದು ಹುಲುಸಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯದ ಮುಖ್ಯ ಹೇತುವಾದ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ನನಸಾಗಲು ಈ ಬೆಳೆ ಏತಕ್ಕೂ ಸಾಲದು. ವಿಜ್ಞಾನದ ಒಂದೊಂದು ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ನೂರು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪ್ರಕಟವಾಗಬೇಕು. ಆ ದಿನದ ಮೇಲೆ ಕಣ್ಣಿಟ್ಟು ಸಂಬಂಧಿಸಿದವರೆಲ್ಲರೂ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ಕಾರ್ಯ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕೆಂದು ನನ್ನ ಕಳಕಳಿಯ ಹಾರೈಕೆ.

ಈಗ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವ ***ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ-2)*** ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿಯ ಮತ್ತೊಂದು ಹೆಜ್ಜೆ. ಇದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟವರೆಲ್ಲ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಗಾಂಧಿ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಕೇಂದ್ರ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು–560 065

ನಾ. ಗು. ಪೇರೂರ
ಕುಲಪತಿಗಳು

ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಅನ್ವಯಿಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಾಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಮೂಲವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ತಿಳಿವಳಿಕೆ ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಮೂಲವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ನಿರ್ದೇಶನಾಲಯವನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿರುವ ಶ್ರೀ ಡಿ. ಎಸ್. ಗುಂಡೂರಾಯರು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇದು ಇದೇ ಲೇಖಕರ ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ ಭಾಗ-1 ರ ಮುಂದಿನ ಭಾಗ. ಇದರಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು, ಗಣಿತಾನುಮಾನ, ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳು, ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ, ಮಂಡಲಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು - ಇವುಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಓದುಗರ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಕೋಶ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ತಾಂತ್ರಿಕವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದವರು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿರುವ ಶ್ರೀ ಎಚ್. ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿಯವರು. ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಭಾಷಾಸಂಪಾದನ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿ ಅಚ್ಚಿಗೆ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದವರು ವಿಭಾಗದ ಸಂಶೋಧನ ಸಹಾಯಕರಾದ ಶ್ರೀಮತಿ ಸಿ. ಕೆ. ಕುಮುದಿನಿಯವರು. ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಕರಡೋದಿದವರು ವಿಭಾಗದ ಕರಡೋದುಗಾರ ಶ್ರೀ ಎಂ. ರಮೇಶ್‌ರವರು.

ಇವರಿಗೆಲ್ಲ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು.

ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಹಾಗೂ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ಮೊದಲವರ್ಷದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆಲ್ಲ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ
ಕನ್ನಡ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು
ಹಾಗೂ
ಕನ್ನಡ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಸಮಿತಿಯ ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿಗಳು

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು–560 065

ಪರಿವಿಡಿ

ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ
(ಭಾಗ - 2)

9

ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

9.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $(a_0 \neq 0)$ ಎಂಬ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು, xನಲ್ಲಿ nನೆಯ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (*i*) $2x^2 + 3x + 1$, ಇದು xನಲ್ಲಿ 2ನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿ.

(ii) $4x^5 - x^2 + 7$, ಇದು xನಲ್ಲಿ 5ನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿ.

9.2 ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು : ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದಿಗಳ ಭಾಗ ಲಬ್ಧವನ್ನು, ಕೆಲವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾದಾಗ, ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮ ಏನು? ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಈಗ ಆಲೋಚಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ,

$$\frac{x+10}{x^2-x-12} \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.2.1)$$

ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಂಶವು xನಲ್ಲಿ 1 ನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿ; ಛೇದವು xನಲ್ಲಿ 2ನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಅಲ್ಲದೆ,

$$\frac{x+10}{x^2-x-12} = \frac{x+10}{(x-4)(x+3)}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ, A, B ಎಂಬ ಸ್ಥಿರ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು

$$\frac{x+10}{x^2-x-12} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} \qquad (9.2.2)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ಯುಕ್ತವಾಗುವಂತೆ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಸಹಜವಾಗಿ ಮೂಡುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ A, Bಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾದಾಗ, $\frac{A}{x+4}$ ಮತ್ತು $\frac{B}{x+3}$ ಗಳನ್ನು $\frac{x+10}{x^2-x-12}$ ಎಂಬ ಮೂಲ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಈಗ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ;

9.3 ನಿಯಮಗಳು :

1. ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತವು ಅದರ ಛೇದದ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ

(i) **ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಬೇಕು.**

(ii) **ಅಧಿಕವಾದರೆ ಅಥವಾ ಸಮನಾದರೆ, ಆಗ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.** ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯೂ ಮತ್ತು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಘಾತದ ಅಂಶವುಳ್ಳ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-4}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಅಂಶದ ಘಾತವು (3), ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ (2) ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಮುಂದಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-4} = x+1+\frac{3x+5}{x^2-4}.$$

2. ಛೇದದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $ax+b$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಕ್ಕೂ $\frac{A}{ax+b}$ ಎಂಬ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

3. ಛೇದದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $(ax+b)^k$, ($k =$ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಎಂಬ ರೂಪದ ಅಪವರ್ತನಕ್ಕೂ

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\dots\frac{A_1}{(ax+b)^k}$$

ಎಂಬ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

4. ಛೇದದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $(ax^2+bx+c)^k$. ($k =$ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ರೂಪದ ಅಪವರ್ತಿಸಲಾಗದ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕ,

(ax^2+bx+c) ದ ಘಾತಕ್ಕೂ,

$$\frac{C_1x+D_1}{ax^2+bx+c}+\frac{C_2x+D_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots\dots+\frac{C_kx+D_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$ ಎಂಬ

ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\frac{2x^2+3x+1}{(x^2+x+1)^2(2x+1)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+x+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2}$$

5. ಹೀಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ $A, A_1, A_2, \dots, A_k, C_1, D_1, C_2, D_2, \dots$, ಇತ್ಯಾದಿ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡ ಸರ್ವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ xಗೆ ಯೋಗ್ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಇದರಿಂದ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ತಿಳಿದು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

9.4 **ಉದಾ :** (i) $\dfrac{x+10}{x^2-x-12}$ ಎಂಬುದರ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. ಅನು. 9.3 ನಿಯಮ 1. (i) ರಿಂದ :

$$\frac{x+10}{x^2-x-12} = \frac{x+10}{(x-4)(x+3)}$$

$$\therefore \frac{x+10}{x^2-x-12} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}$$ [9·3 ನಿಯಮ 2ರಿಂದ]

ಇದರ ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನು $(x-4)(x+3)$ರಿಂದ ಗುಣಿಸೋಣ. ಆಗ

$$x+10 \equiv A(x+3)+B(x-4) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9.4.1)$$

ಎಂಬ ಸರ್ವ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ, ಇದರಲ್ಲಿ.

$x=4$ ಆದಾಗ, $4+10=A(4+3)$ .... [ಏಕೆ?]

$\Rightarrow \quad 14=A7$

$\therefore \quad A=2$

ಮತ್ತು $x=-3$ ಆದಾಗ, $-3+10=B(-3-4)$

$\Rightarrow \quad 7=-7B$

$\therefore \quad B=-1,$

$$\therefore \frac{x+10}{x^2-x-12} = \frac{2}{x-4} - \frac{1}{x+3}$$

(ii) $\dfrac{x^3+3x^2-7x-20}{x^2+3x-10}$ ಎಂಬುದರ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು

ಪಡೆಯೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಂಶದ ಘಾತವು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ; ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ [9.3 ನಿಯಮ 1, (ii) ರಿಂದ],

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x-10 & x^3+3x^2-7x-20 \;\left(x+\dfrac{3x-20}{x^2+3x-10}\right. \\ & \underline{x^3+3x^2-10x} \\ & \qquad\quad +3x-20 \\ & \qquad\quad \underline{3x-20} \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{x^3+3x^2-7x-20}{x^2+3x-10} = x+\frac{3x-20}{x^2+3x-10}$$

ಇದರಲ್ಲಿ $\dfrac{3x-20}{x^2+3x-10} = \dfrac{3x-20}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{5}{x+5} - \dfrac{16}{7(x-2)}$ ಎಂದು

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕ (i) ರಲ್ಲಿ ಪಾಲಿಸಿದ 9.3 ರ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{x^3+3x^2-7x-20}{x^2+3x-10} \; x+\frac{5}{x+5}-\frac{16}{7(x-2)}$$

(iii) $\dfrac{x^2}{(x-1)^3\,(x+1)}$ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸೋಣ. ಈಗ,

$$= \frac{1}{2y^3} + \frac{3}{4y^2} + \frac{1}{8y} - \frac{1}{8(2+y)}$$

$$= \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+1)}$$

9.6 ಉದಾ : $\frac{x-4}{(x^2+3)(2x-1)}$ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ. ಈಗ 9.3 ನಿಯಮ 4 ರಿಂದ

$$\frac{x-4}{(x^2+3)(2x-1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\therefore \quad x-4 = A(x^2+3) + (Cx+D)(2x-1)$$

$x=0$ ಆದಾಗ : $-4=3A-D$ .... (a)

$x=\frac{1}{2}$ ಆದಾಗ : $-4=A(\frac{1}{4}+3)$

$\Rightarrow -\frac{7}{2} = \frac{13A}{4}$, ಅಥವಾ $A = \frac{-14}{13}$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು

(a) ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ :

$$-4 = 3 \times \frac{-14}{13} - D$$

$$\Rightarrow \quad -52 = -42 - 13D$$

$$\therefore \quad -10 = -13D \text{ ಅಥವಾ, } D = \frac{10}{13}$$

ಈಗ ಸರ್ವ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿ ಬರುವ x^2 ನ ಗುಣಕವನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ :

$$0 = A + 2C$$

$$\therefore C = \frac{-A}{2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{-14}{13}\right) = \frac{7}{13}$$

ಆದ್ದರಿಂದ : $$\frac{x-4}{(x^2+3)(2x-1)} = \frac{-14}{13(2x-1)} + \frac{7x+10}{13(x^2+3)}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. $\dfrac{5x-11}{(x+2)(2x-3)}$

2. $\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$

3. $\dfrac{7x-1}{1-5x+6x^2}$

4. $\dfrac{2x+5}{(x-1)\,(x+2)}$

5. $\dfrac{46+13x}{12x^2-11x-15}$

6. $\dfrac{x+10}{(x+3)\,(x-4)}$

7. $\dfrac{1+3x+2x^2}{(1-2x)\,(1-x^2)}$

8. $\dfrac{3x-20}{(x-2)\,(x+5)}$

9. $\dfrac{2x^3+x^2-x-3}{x(x-1)(2x+3)}$

10. $\dfrac{6x^2-11x+13}{(x-2)^2(x+3)}$

11. $\dfrac{26x^2+208x}{(x^2+1)(x+5)}$

12. $\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$

13. $\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}$

14. $\dfrac{3x-2}{(2x^2+3)(2x+1)}$

15. $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$

16. $\dfrac{3x+4}{(x+3)^3}$

17. $\dfrac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$

18. $\dfrac{x^3+3x^2-7x-20}{x^2+5x-10}$

19. $\dfrac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$

20. $\dfrac{2x^2-3x-4}{x^2-x-6}$

21. $\dfrac{mx+n}{(x-a)(x-b)}$

22. $\dfrac{x^3}{x^2-1}$

23. $\dfrac{5x^3+6x^2+5x}{(x^2-1)(x+1)^3}$

24. $\dfrac{x-4}{(x^2+5)\,2x}$

25. $\dfrac{1+3x}{1+11x+28x^2}$

26. $\dfrac{3x-8}{2x^2+x-6}$

27. $\dfrac{3+2x-x^2}{(1+x)(1-4x)^2}$

28. $\dfrac{3x+5}{x^2+2x-3}$

29. $\dfrac{4+7x}{(2+3x)\,(1+x)^2}$

30. $\dfrac{x+4}{3x^2-x-2}$

31. $\dfrac{2x+1}{(x-1)\,(x^2+1)}$

32. $\dfrac{5x+6}{(2+x)\,(1-x)}$

33. $\dfrac{2x-5}{(1-x^2)\,(2x+3)}$

34. $\dfrac{4+3x+2x^2}{(1-x)\,(1+x-2x^2}$

10

ಗಣಿತಾನುಮಾನ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ನೇರ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ನಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನ ಕ್ಲಿಷ್ಟತರವಾಗುವ ಸಂಭವಗಳು ಇದ್ದೇ ಇವೆ. ಇಂತಹ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ **ಗಣಿತಾನುಮಾನ** ಎಂಬ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಅಂತಹ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿರುವ ಮೂಲತತ್ತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ:

10·1 ಗಣಿತಾನುಮಾನ ತತ್ವ : $1 \in S \subset \{1, 2, 3, 4, \dots\} = N$ **ಮತ್ತು** $p \in S$ **ಆದಾಗ** $p+1 \in S$ **ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ** $S = N$ **ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.**

10·2 **ಟೀಕೆ :** ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಧನ-ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಪ್ರಯೋಗ ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದ್ದೇವೆ.

10·3 **ಉದಾ :** n ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ,

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots (10.3.1)$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : (10,3,1)ನ್ನು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ S ಆಗಿರಲಿ, $S \subset N$ [ಏಕೆ?].

$$1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$ ಇರುವುದರಿಂದ, $n = 1$ ಆದಾಗ, (10,3,1)

ಸಾಮಂಜಸವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $1 \in S$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(i) $\therefore\ 1 \in S \subset N.$

$$1+2+3+\dots+p = \frac{p(p+1)}{2}$$

ಈಗ ಎರಡು ಬದಿಗೂ $(p+1)$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ :

$$1+2+3+\dots+p+(p+1) = \frac{p(p+1)}{2}+(p+1)$$

$$=(p+1)\left(\frac{p}{2}+1\right)$$

$$=\frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

$(10\cdot3\cdot1)$ರಲ್ಲಿ $n=p+1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $P+1 \in S$. ಆದ್ದರಿಂದ,

(ii) $P \in S$ ಆದಾಗ $P+1 \in S$.

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ $S=N$. [ಏಕೆ ? 'ಗಣಿತಾನುಮಾನ ತತ್ವ' ನೋಡಿರಿ.]

ಅಂದರೆ, n ಯಾವ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೂ $(10\cdot3\cdot1)$ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

10·4 ಉದಾ : nನ ಎಲ್ಲಾ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (10\cdot4\cdot1)$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : (10.4.1)ನ್ನು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ S ಎನ್ನೋಣ. ಇದರಿಂದ $S \subset N$.

$1^2 = \dfrac{1(1+1)\ (2.1+1)}{6}$ ಇರುವುದರಿಂದ, $n=1$ ಆದಾಗ, (10.4.1) ಸಮಂಜಸವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $1 \in S$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(i) $\therefore\ 1 \in S \subset N$.

ಈಗ $P \in S$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ,

$$1^2+2^2+3^2+\dots+p^2 = \frac{p(p+1)\ ({}^2p+1)}{6}$$

ಇದರ ಎರಡು ಬದಿಗೂ $(p+1)^2$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ :

$$1^2+2^2+3^2+\dots+p^2(p+1)^2 = \frac{p(p+1)\ (2p+1)}{6}+(p+1)^2$$

$$= \frac{(p+1)}{6}\left\{ p(2p+1)+6(p+1) \right\}$$

$$= \frac{(p+1)}{6}\left\{ 2p^2+7p+6 \right\}$$

$$= \frac{(p+1)\,(p+2)\ (2p+3)}{6}$$

$$= \frac{(p+1)\ \{(p+1)+1\}\{2(p+1)+1\}}{6}$$

(10.4.1) ರಲ್ಲಿ $n = p+1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $p+1 \in S$. ಆದ್ದರಿಂದ,

(ii) $p \in S$ ಆದಾಗ $p+1 \in S$.

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ $S = N$ ಇದರಿಂದ ಸಾಧನೆಯು ಪೂರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆ.

10.5 **ಉದಾ :** n ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \ldots \quad \textbf{(10.5.1)}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : (10.5.1) ನ್ನು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ S ಎಂದಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $S \subset N$.

$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ಇರುವುದರಿಂದ, $n = 1$ ಆದಾಗ (10.5.1) ಸಮಂಜಸವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $1 \in S$

(i) $\therefore\ 1 \in S \subset N$

ಈಗ $p \in S$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \ \ldots\ + p^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

ಇದರ ಎರಡು ಬದಿಗೂ $(p+1)^3$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3$$

$$= \frac{(p+1)^2}{4}\{p^2+4(p+1)\}$$

$$= \frac{(p+1)^2\,(p^2+4p+1)}{4}$$

$$= \frac{(p+1)^2\,(p+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(p+1)\,\{(p+1)+1\}^2}{4}$$

(10·5·1) ರಲ್ಲಿ $n=p+1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದ್ದರೆ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $p+1 \in S$.

(ii) $\therefore$ $p \in S$ ಆದಾಗ $p+1 \in S$.

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ $S=N$ ಇದರಿಂದ ಸಾಧನೆ ಪೂರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆ.

10·6 **ಉದಾ :** n ಸಂಖ್ಯೆಯು 3ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾದ ಯಾವ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $5+7+9+\ldots+(2n-1)=n^2-4$ ... (10.6.1) ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : $n=1$ ಆದಾಗ (10.6.1) ಸಮಂಜಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ [ಏಕೆ?]. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$(4)+5+9+\ldots+(2n-1)=n^2$$

$$\Rightarrow \quad (1+3)+5+9+\ldots+(2n-1)=n^2$$

ಈಗ $P \in S$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ,

ಅಥವಾ, $1+3+5+9+\ldots+(2n-1) = n^2$ . .(10.6.2)

ಈಗ, $1=1^2$ ಇರುವುದರಿಂದ, $n=1$ ಆದಾಗ (10.6.2) ಸಮಂಜಸವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $1 \in S=$(10.6.2)ನ್ನು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ $\subset N$. ಈಗ $p \in S$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ,

$$1+3+5+9+ \dots +(2p-1)=p^2.$$

ಇವರ ಎರಡು ಬದಿಗೂ $\{2(p+1)-1\}=2p+1$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ :

$$1+3+5+9+ \dots +(2p-1)+(2p+1)=p^2+2p+1$$
$$=(p+1)^2$$

ಈಗ (10.6.2) ರಲ್ಲಿ $n=p+1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ಬರುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ $P+1 \in S$.

(ii) $\therefore$ $p \in S$ ಆದಾಗ $p+1 \in S$.

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ ಸಾಧನೆಯು ಪೂರ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.6

ಗಣಿತಾನುಮಾನವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ ;

1. $3+5+ \dots +(2n-1)=n^2-1$
2. $2+4+6+ \dots +2n=n(n+1)$
3. $2+2^2+2^3+ \dots +2^n=2(2^n-1)$
4. $1+4+4^2+ \dots +4^{n-1}=(4^n-1)/3$
5. $1.2+2.3+3.4+ \dots +n(n+1)=n(n+1)(n+2)/3$
6. $1.5+2.7+3.9+ \dots$ n ಪದಗಳು $=n(n+1)(4n+1)/6$
7. $1^2+3^2+5^2+ \dots +(2n-1)^2=n(2n-1)(2n+1)/3$
8. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+ \dots +n(n+1)^2=n(n+1)(n+2)(3n+5)/12$

9. $1.3.4+2.5.6+3.7.8+ \dots +n(2n+1)(2n+2)$
$= n(n+1)^2(n+2$

10. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

11. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

12. $1+3+6+\dots$ n ಪದಗಳು $= n(n+1)(n+2)/6$

13. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

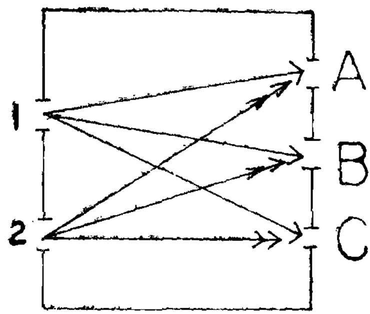
14. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\dots$ n ಪದಗಳು $=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

15. $a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(a+\overline{n-1}.d) =$
$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

11

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳು

11.1 ಒಂದು ಚಲನಚಿತ್ರಮಂದಿರವನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸಲು 2 ದ್ವಾರಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಗಮಿಸಲು 3 ದ್ವಾರಗಳು ಇವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಚಲನಚಿತ್ರ ಮಂದಿರವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ (ಬೇರೆ ಬೇರೆ) ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಿಸಿ ನಿರ್ಗಮಿಸಬಹುದೆಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. [ಚಿತ್ರ : 11.1.1 ನೋಡಿರಿ].



ಚಿತ್ರ 11.1.1

ಚಿತ್ರ : 11.1.1 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶ ದ್ವಾರಗಳನ್ನು 1,2 ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ನಿರ್ಗಮನ ದ್ವಾರಗಳನ್ನು A,B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ದ್ವಾರ 1 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ

ನಿರ್ಗಮಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ಬಾಣದ ಗುರ್ತಿನಿಂದ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ [ಈ ಗುರ್ತಿನಿಂದ : $\rightarrow$], ಅಂದರೆ A, B ಅಥವಾ C ಈ 3 ದ್ವಾರಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವ ಒಂದು ದ್ವಾರದಿಂದಲಾದರೂ ಚಲನಚಿತ್ರ ಮಂದಿರದಿಂದ ನಿರ್ಗಮಿಸಬಹುದು. ದ್ವಾರ 2ರಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದಾಗಲೂ ಸಹ, ಇದೇ ರೀತಿ 3 ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಚಲನಚಿತ್ರಮಂದಿರದಿಂದ ನಿರ್ಗಮಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. [ಇದನ್ನು $\rightarrow$ ಈ ಗುರ್ತಿನಿಂದ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.] ಆದ್ದರಿಂದ $3+3=6$ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಚಲನಚಿತ್ರ ಮಂದಿರವನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸಿ ನಿರ್ಗಮಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯ : ಪ್ರವೇಶಿಸಲು 2 ದ್ವಾರಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಗಮಿಸಲು 3 ದ್ವಾರಗಳು ಇರುವಾಗ 2×3 ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸಿ ನಿರ್ಗಮಿಸಬಹುದು. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

***11.2* ಮೂಲಸೂತ್ರ : ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು m ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಆಚರಿಸಿದ ನಂತರ, ಇದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು n ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆಚರಿಸಬಹುದಾದರೆ, ಆಗ ಆ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ $m \times n$ ವಿವಿಧವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆಚರಿಸಬಹುದು, ಈ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು $m \times n$ ವಿಧಗಳ ಪೈಕಿ ಮೇಲಿನಂತೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಆಚರಿಸಿದನಂತರ ಮೂರನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯೊಂದನ್ನು p ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆಚರಿಸಬಹುದಾದರೆ, ಆಗ ಈ ಮೂರು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ $m \times n \times p$ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆಚರಿಸಬಹುದು. ಇತ್ಯಾದಿ.**

11.3 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ದತ್ತವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಗಮನಕೊಟ್ಟು ಪ್ರಕಾರ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಸರಳ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.**

11.4 **ಉದಾ :** 1. a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಎರಡು ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ, ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಎರಡು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸರಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

(i) **ಪುನರಾವರ್ತನೆ ನಿಷಿದ್ಧ : ಇಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಕ್ಷರವನ್ನೂ, ಯಾವುದೇ ಸರಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಾರದೆಂಬ ನಿಬಂಧ ಹಾಕಿಕೊಂಡು, ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸರಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು : ab ಮತ್ತು ba.**

(ii) **ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧ :** ಇಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದ ಕ್ರಮವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ದತ್ತ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸರಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು : i) ಮೊದಲಕ್ಷರ a ಆದಾಗ : a a, ab

ii) — ,, — b — ,, — : b a, bb.

ಆದ್ದರಿಂದ aa, ab, ba, bb ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಿವೆ.

2 ಈಗ a, b, c ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ 2 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

(i) **ಪುನರಾವರ್ತನೆ ನಿಷಿದ್ಧ :**

(i) a ದಿಂದ ಶುರುವಾಗುವ ಸರಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು : ab, ac

ii) b — ,, — ,, : bc, ba

iii) c — ,, — ,, : ca, cb

∴ ಬೇಕಾದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು : ab, ac, bc, ba, ca, cb, ಅಂದರೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ನಿಷಿದ್ಧವಿರುವಾಗ 2 ಅಕ್ಷರದ ಆ ಸರಳಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು 3 ವಿವಿಧ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದು.

(ii) **ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧ :**

i) ಮೊದಲಕ್ಷರ a ಆದಾಗ : aa, ab, ac

ii) — ,, — b — ,, : ba, bb, bc

iii) — ,, — c — ,, : ca, cb, cc ಆದ್ದರಿಂದ

ಬೇಕಾದ ಸರಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು :

aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc .... (11.4.1)

ಅಂದರೆ, ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಿರುವಾಗ, 3 ವಿವಿಧ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ, ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ 2 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ 9 ಸರಳ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

11.5 **ಟೀಕೆ : ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದುದ್ದಕ್ಕೂ, ಅನುಕೂಲದ ಸಲುವಾಗಿ, 'ಸರಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ' ಎಂದು ಬರೆಯುವುದರ ಬದಲು**

ಸುಮ್ಮನೆ 'ಕ್ರಮಯೋಜನೆ' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅರ್ಥಾತ್ 'ಕ್ರಮಯೋಜನೆ' ಎಂದು ಬರೆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ ಸರಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಹೇಳುತ್ತಿದ್ದೇವೆಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. (11.4.1) ರಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿದರೆ, ಆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯು ಲಭಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ [ಏಕೆ ?] ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕ 2 ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಮಾಡಬಹುದು.

(i) **ಪುನರಾವರ್ತನೆ ನಿಷಿದ್ಧ :** ಚಿತ್ರ : 11.5.1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು a, b, c ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾರಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಿದಾಗಲೆಲ್ಲಾ, ಬೇಕಾದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯೊಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ [ಏಕೆ ?].

1	2

ಚಿತ್ರ : 11.5,1

ಈಗ 1ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ದತ್ತ 3 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಕ್ಷರದಿಂದ, ಅಂದರೆ 3 ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದು. ಹೀಗೆ 1ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಭರ್ತಿಮಾಡಿದ ನಂತರ, ಉಳಿದ 2 ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ, 2ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು 2 ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ 11.2 ಮೂಲಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, 2 ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ $3 \times 2 = 6$ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದು. ಅಂದರೆ 3 ವಿವಿಧ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಎಂದಾಯಿತು.

(ii) **ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧ :** ಚಿತ್ರ : 11.5.1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ 1ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಕ್ಷರದಿಂದ ತುಂಬಿದ ನಂತರ [ಇದನ್ನು 3 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು], 2ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನೂ ಸಹ 3 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬ

ಬಹುದು ಏಕೆಂದರೆ, 1ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಮತ್ತೆ 2ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿಯೂ ತುಂಬಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡೂ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ $3 \times 3 = 9$ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು ಅಥವಾ, ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಿರುವಾಗ, 3 ವಿವಿಧ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ, ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ 2 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ ಮಾಡಿದ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 9.

n ಮತ್ತು r ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ($r \leqslant n$) ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಆರಿಸಿ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ $_nP_r$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ನಿಷಿದ್ಧವಿರುವಾಗ, $_3P_2 = 6$ ಎಂಬುದನ್ನು ಆಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ.

11.6 ಪ್ರಮೇಯ : **ಪುನರಾವರ್ತನೆ ನಿಷಿದ್ಧವಿರುವಾಗ, n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು.**

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots (n-r+1) \quad \cdots \quad (16.6.1)$$

ಸಾಧನೆ : ಸಾಲಾಗಿ ಒಂದರ ಪಕ್ಕದಲ್ಲೊಂದರಂತೆ ಇಟ್ಟಿರುವ r ಖಾಲಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ದತ್ತ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ (ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಹಾಕಬೇಕು) ತುಂಬಿದಾಗಲೆಲ್ಲಾ ಬೇಕಾದ ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿತ್ರ : 11.6.1 ರಲ್ಲಿರುವ r ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ದತ್ತ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಮೇಲಿನಂತೆ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

n	n-1	n-2	n-2	n-4	....	n-(n-2)	n-(r-1)
1	2	3	4	5		r-1	n

ಚಿತ್ರ 11.6.1

1 ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು [ಚಿತ್ರ : 11.6.1 ನೋಡಿ] ದತ್ತ n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ, ಯಾವ ವಸ್ತುವಿನಿಂದಲಾದರೂ, ಅಂದರೆ n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಹುದು. ಹೀಗೆ

1ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಿದನಂತರ, 2ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಉಳಿದ $(n-1)$ ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ $(n-1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 1 ಮತ್ತು 2ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು $n(n-1)$ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು [11.2 ಮೂಲ ಸೂತ್ರನೋಡಿ], 1 ಮತ್ತು 2 ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ತುಂಬಿದನಂತರ, 3 ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಲು $(n-2)$ ವಸ್ತುಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ [ಏಕೆ ?] ; ಅಂದರೆ 3ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು, ಮೊದಲ ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದನಂತರ, $(n-2)$ ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದೆಂದಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ 1,2 ಮತ್ತು 3ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ $n(n-1)(n-2)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಈ ವಾದಸರಣಿಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುವುದರಿಂದ r ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ,

$$\{n(n-1)(n-2) \quad \ldots \quad \ldots \quad r \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}\}$$

ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಿಂದ ತುಂಬಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $nPr = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1) \ldots \qquad (11.6.2)$

11.7 ಅನುಮಿತ : ವಸ್ತುಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಿರುವಾಗ $nPr = n^r$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ

ಸಾಧನೆ : ಈಗ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲಾ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲೂ ಬರಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ [ಏಕೆ ?], ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನೂ n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ r ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ $n \times n \times n \times \ldots n$ ಅಪವರ್ತಗಳು $= n^n$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಸಾಧನೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

11.8 ಟೀಕೆ : (11·6·1) ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ r ಅಪವರ್ತನ ಮೊದಲನೆಯ ಅಪವರ್ತನ n ; ಎರಡನೆಯ **ಅಥವಾ** ಉಳಿದ ಯಾವ **ಅಪವರ್ತನವೇ ಆಗಲಿ, ಅದು ತನ್ನ ಹಿಂದಿನ ಅಪವರ್ತನಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಕಡಮೆಯಾಗಿದೆ** [ಅಂದರೆ { ಹಿಂದಿನ ಅಪವರ್ತನ — 1}] ಎಂಬುದನ್ನು **ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ. ಈ ಅಂಶಗಳು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತವೆ.**

ಉದಾ : ${}_{12}P_7 = 12(12-1)(12-2)\ldots\ldots 7$ ಅಪವರ್ತನಗಳು,

$= 12.11.10.9.8.7.6$

${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots n$ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots 3.2.1.$

$= \lfloor n$ ಅಥವಾ $n!$ ಎಂದು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ,

$\lfloor n = n!$ ಎಂಬುದನ್ನು **'n ಶ್ರೇಣಿಲಬ್ಧ'** ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಈಗ,

$\lfloor 5 = 5.4.3.2.1 = 120,$

ಮತ್ತು $3! = 3.2.1 = 6.$

11.9 ಉದಾ : $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : $${}_nP_r = (n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1} \cdot \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots 3.2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots 3.2.1}$$ = ಬಲಬದಿ [ಏಕೆ?]

$$\therefore \quad {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11.9.1)$$

ಉದಾ : 5 ವಿವಿಧ ಬಣ್ಣಗಳ-ಅಂದರೆ ಕೆಂಪು. ಹಳದಿ, ಬಿಳಿ, ಕಪ್ಪು ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ಒಂದೊಂದು ಚೆಂಡು ಇದೆ. ಈ 5 ಚೆಂಡುಗಳಿಂದ ಒಂದುಸಲಕ್ಕೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ (i) 3 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನಾರಿಸಿದ (ii) 4 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನಾರಿಸಿದ ಮತ್ತು (iii) 5 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನಾರಿಸಿದ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧಜೋಡಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು? ಹೇಗೆ (iii)ರಲ್ಲಿ ಛಮಾಡಿದ ಜೋಡಣೆಗಳ ಪೈಕಿ, ಎಷ್ಟು ಜೋಡಣೆಗಳು(a)ಹಸಿರು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತವೆ? (b)ಕೆಂಪು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಯವಾಗುತ್ತವೆ? (c) ಹಸಿರು ಚೆಂಡಿನಿಂದ

ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ, ಕೆಂಪು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಯವಾಗುತ್ತವೆ.? (d) ಎಷ್ಟು ಜೋಡಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಮತ್ತು ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಜೊತೆಯಾಗಿ ಬರುತ್ತವೆ.

(i) 5 ಚೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ 3ನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಜೋಡಣೆಗಳ (ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ)ಸಂಖ್ಯೆ $= {}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$. ಇದೇರೀತಿ (ii)ಮತ್ತು (iii) ರ ಜೋಡಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ${}_5P_4 = 5.4.3.2 = 120$ ಮತ್ತು ${}_5P_5 = 5.4.3.2.1. = 120$.

(a) ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ : ಇಲ್ಲಿ ಜೋಡಣೆಯು ಹಸಿರು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, 1ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ [ಚಿತ್ರ: 11.9.1 ನೋಡಿರಿ]ಹಸಿರು ಚೆಂಡನ್ನು ತುಂಬಿ [ಇದನ್ನು ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ತುಂಬಬಹುದು-ಏಕೆ?]ಅನಂತರ ಉಳಿದ 4 ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು 4 ಚೆಂಡುಗಳಿಂದ ತುಂಬಿದರೆ, ಹಸಿರು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಒಂದು ಜೋಡಣೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.ಆದ್ದರಿಂದ ಹಸಿರು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಜೋಡಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ಒಂದನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಿಸುವ ಕ್ರಮ × ಉಳಿದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸುವ ಕ್ರಮ. $= 1 \times {}_4P_4 = 24$ [ಏಕೆ?].

ಹಸಿರು				ಕೆಂಪು
1	2	3	4	5

ಚಿತ್ರ 11.9.1

(b)ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ: ಇಲ್ಲಿ ಜೋಡಣೆಯು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಯವಾಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, 5ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತುಂಬಿ, ನಂತರ ಉಳಿದ 4ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಂಪು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಯವಾಗುವ ಜೋಡಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಿಸುವಕ್ರಮ × ಉಳಿದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸುವ ಕ್ರಮ $= 1 \times {}_4P_4 = 24$ [ಏಕೆ?].

(c) ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ : ಜೋಡಣೆಯು ಹಸಿರು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಕೆಂಪು ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, ಮೊದಲು ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಐದನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹಸಿರು ಮತ್ತುಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳಿಂದ ತುಂಬಿ ನಂತರ ಉಳಿದ 3 ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಉಳಿದ 3 ಚೆಂಡಿನಿಂದ ಪ್ರತಿಸಾರಿ ತುಂಬಿದಾಗಲೂ, ಬೇಕಾದ ಒಂದು ಜೋಡಣೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಜೋಡಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 1 \times 1 \times {}_3P_3 = 6$.

(d) ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ : ಈಗ ಕಪ್ಪು ಮತ್ತು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಜೊತೆಯಾಗಿ ಬರಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವೆರಡನ್ನು ಒಂದು ಚೆಂಡೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ 5 ಚೆಂಡುಗಳಿದ್ದರೂ 4 ಚೆಂಡುಗಳೆಂದು ತಿಳಿದು ಎಲ್ಲಾ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದರಿಂದ ಕೆಂಪು ಮತ್ತು ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಜೊತೆಯಾಗಿ ಬರುವಂತಹ $|_4P_4 = 4.3.2.1 = 24$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಮತ್ತು ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳ ಜೊತೆ ಮುರಿಯದಂತೆ, ಅವುಗಳನ್ನು $|_2P_2 = 2$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಂಪು ಮತ್ತು ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಜೊತೆಯಾಗಿ ಬರುವ ಒಟ್ಟು ವಿವಿಧ ಜೋಡಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 24 \times 2 = 48$.

11.10 ಉದಾ : 1,2,3 ಮತ್ತು 4 ಎಂಬ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಿರುವಾಗ,

(i) ಒಂದು ಅಂಕೆಯ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು?
(ii) ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು?
(iii) ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು?
(iv) ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು?
(v) ಮೇಲೆ (iii) ರಚಿಸಬಲ್ಲ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು ?
(vi) 4321 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಿರುವ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು? ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ

ಉತ್ತರ : (i) 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಅವು 1, 2, 3 ಮತ್ತು 4 ಎಂಬುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಚಿತ್ರ: 11.5.1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ. ಒಂದನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ದತ್ತ 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ತುಂಬಬಹುದು. ಅಂದರೆ, 4 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು ಹೀಗೆ ಒಂದನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದನಂತರ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಸಹಾ 4 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು; ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಕೆಯಲ್ಲಿ ಏಕಕಾಲಿಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲಾ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲೂ ಬರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ $4 \times 4 = 4^2$

ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಪಶ್ಚಾತ್, ದತ್ತ ಅಂಕೆಗಳಿಂದ 2 ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ 4^2 ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(iii) ಚಿತ್ರ : 11.10.1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ 3 ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ವಾದಸರಣಿಯನ್ನು 3ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೂ ಮುಂದುವರಿಸುವುದರಿಂದ $4\times4\times4=4^3$

1	2	3

ಚಿತ್ರ 11.10.1

ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಅಂಕಗಳಿಂದ ತುಂಬಬಹುದು ಎಂಬುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ 4^3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(iv) ಮೇಲಿನ ವಾದಸರಣಿಯ ಅವಲೋಕನೆಯಿಂದ, 4 ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ $4\times4\times4\times4=4^4$ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

(v) ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ 64 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ 64 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಇರುವ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಚಿತ್ರ : 11.10.1 ರಲ್ಲಿ 1ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1ನ್ನು ತುಂಬಿ, ಅನಂತರ 2ನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು 4 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು ; 2ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಈ 4 ವಿಧಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದನಂತರ, 3ನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಮತ್ತೆ 4 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಇರುವ $1\times4\times4=16$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆಯೆಂದಾಯಿತು. ಅಥವಾ 64 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ, 16 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1ನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 2, 3, 4 ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಕೆಯೂ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 16 ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ 64 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ,

16 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಬರುತ್ತದೆ;
16 —,,— 2 —,,—
16 —,,— 3 —,,—, ಮತ್ತು
16 —,,— 4 —,,— ಎಂದಾಯಿತು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 16\times 1+16\times 2+16\times 3+16\times 4=160$ ಎಂದಾಯಿತು. ಇದೇ ರೀತಿ ದಶಕ ಮತ್ತು ಶತಕ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 160 ಮತ್ತು 160 ಎಂದು, ಮೇಲಿನ ವಾದಸರಣಿಯ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತ $=160\times 10^2+160\times 10+160\times 10^0=17760$ ಎಂದಾಯಿತು. [ಏಕೆ? $324=3\times 10^2+2\times 10+4\times 10^0$ ಎಂಬುವದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.]

(vi) ಈಗ 4321 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಿರುವ ಎಷ್ಟು ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

	ಸಾವಿರ ಸ್ಥಾನ	ಶತಕ ಸ್ಥಾನ	ದಶಕ ಸ್ಥಾನ	ಏಕ ಸ್ಥಾನ
a) ತುಂಬಲು ಯೋಗ್ಯ ಅಂಕೆಗಳು	3,2,1 (3 ವಿಧಗಳು)	1,2,3,4 (4 ವಿಧಗಳು)	1,2,3,4 (4 ವಿಧಗಳು)	1,2,3,4 (4 ವಿಧಗಳು)
b) ತುಂಬಲು ಯೋಗ್ಯ ಅಂಕೆಗಳು	4 (1 ವಿಧ)	3 (1) ವಿಧ	1 (1 ವಿಧ)	1,2,3,4 (4 ವಿಧಗಳು)
c) ತುಂಬಲು ಯೋಗ್ಯ ಅಂಕೆಗಳು	4 (1 ವಿಧ)	2,1 (2 ವಿಧಗಳು)	1,2,3,4 (4 ವಿಧಗಳು)	1,2,3,4 (4 ವಿಧಗಳು)

(a) ನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿವರಗಳಿಂದ : $3\times 4\times 4\times 4=192$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(b) —,,— : $1\times 1\times 1\times 4=4$ —,,—

(c) —,,— : $1\times 2\times 4\times 4=32$ —,,—

∴ 4321 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. } = 228

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ = 1 ಅಂಕೆಯುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು + 2 ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು + 3 ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು + 4 ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $4+4^2+4^3+228$

$= 312.$

11.11 **ಉದಾ :** 2,4,5,0,6 ಎಂಬ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 3 ಅಂಕೆಗಳ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ? ಇವುಗಳಲ್ಲಿ (i) ಎಷ್ಟು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ? (ii) ಎಷ್ಟು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ? (iii) ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 425ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿವೆ ? (iv) ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ : ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ನಿಷಿದ್ಧ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಬಿಡಿಸೋಣ. ಶತಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಬರುವಂತಿಲ್ಲ. [ಏಕೆ?]. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ಸೂಚನೆ : ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಮೊದಲು ತುಂಬಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು 'I' ಎಂಬ ಸಂಕೇತ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 'II' ಎಂಬ ಸಂಕೇತ ಯಾವ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಂತರ ತುಂಬಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ, ಇತ್ಯಾದಿ. * ಈ ಚಿಹ್ನೆಯು ಸೂಚಿಸುವ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಿದ ನಂತರ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಳಿದ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದಾದ ಯೋಗ್ಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗಿದೆ.

	ಶತಕ ಸ್ಥಾನ	ದಶಕ ಸ್ಥಾನ	ಏಕ ಸ್ಥಾನ
(a) ತುಂಬಲು ಯೋಗ್ಯ ಅಂಕೆಗಳು	*2,4,5,6 : (I)	*4,5,6,0 : (II)	5,6,0 : (III)

(b) (i)ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ	*4,6,5 : (II)	5,6,0 : (III)	*2,4,6 : (I)
	4,5,6 : (III)	*2,4,5,6 : (II)	*0 : (I)
(c) (ii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ	*2,4,6 : (II)	4,6,0 : (III)	*5 : (I)
(d) (iii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ	*4 ; (I)	*2 : (II)	6 ; (III)
	*4 : (I)	*5,6 : (II)	6,0,2 : (III)
	*6 : (I)	6,*0,2,4 : (II)	6,2,4 ; (III)

(a) **ಭಾಗದ ವಿವರಣೆ :** ಶೂನ್ಯವು ಶತಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವಂತಿಲ್ಲ. [ಏಕೆ ? ಬಂದರೆ ನಿಮಗೆ 3 ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಕ್ಕುತ್ತದೆಯೆ ?] ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಮೊದಲು ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿ, ಅನಂತರ ಉಳಿದ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಬೇಕು. ಈ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ದತ್ತ ಅಂಕೆಗಳ ಪೈಕಿ 2, 4, 5, 6— ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದರಿಂದಲಾದರೂ [2ರಿಂದ ಅಂಬೋಣ]— ಅಂದರೆ 4 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಇದನ್ನು ತುಂಬಿದನಂತರ, ದಶಕ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಉಳಿದ 4, 5, 6, 0 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದರಿಂದಲಾದರೂ [4ರಿಂದ ಅಂಬೋಣ]— ಅಂದರೆ 4 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಮೊದಲ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ತುಂಬಿದನಂತರ, ಏಕಸ್ಥಾನವನ್ನು ಉಳಿದ 5, 6, 0 — ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ 3 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 3 ಅಂಕೆಗಳ $4 \times 4 \times 3 = 48$ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(b) **ಭಾಗದ ವಿವರಣೆ :** ಈಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 2, 4, 6

ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯ ಇರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ [ಏಕೆ ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ]. ಆದ್ದರಿಂದ : $3 \times 3 \times 3 + 1 \times 4 \times 3 = 39$ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(c) **ಭಾಗದ ವಿವರಣೆ :** ಸಂಖ್ಯೆಯು ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 5 ಬಂದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದರಿಂದ, ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 5ನ್ನು ತುಂಬಿದ ನಂತರ, ಶತಕ ಮತ್ತು ದಶಕ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತುಂಬುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ : $1 \times 3 \times 3 = 9$ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(d) **ಭಾಗದ ವಿವರಣೆ :** ಶತಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 4 ಮತ್ತು ದಶಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 2 ಬಂದಾಗ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 6ರ ವಿನಃ ಬೇರೆ ಯಾವ ಅಂಕೆಯೂ ಬರುವಂತಿಲ್ಲ. [ಏಕೆ ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ], ಇತ್ಯಾದಿ. ಆದ್ದರಿಂದ 425ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಿರುವ $1 \times 1 \times 1 + 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 3 = 31$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(iv) ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ದಶಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 5 ಎಂಬ ಅಂಕೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಂದರೆ, ಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಈ ಅಂಕೆಯು ಕೊಡುಗೆ $5 \times 10 = 50$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇದೇ ರೀತಿ ಶತಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ 4 ಎಂಬ ಅಂಕೆಯು ಕೊಡುಗೆ $4 \times 10^2 = 400$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(a) ಈಗ ಶತಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 5 ಎಂಬ ಅಂಕೆಯು ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಶತಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 5 ಬಂದಾಗ, ಉಳಿದ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು $4 \times 3 = 12$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. [ಏಕೆ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ]. ಆದ್ದರಿಂದ 12 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶತಕ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ 5 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 2, 4, 6 ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ 12 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಶತಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಶತಕ ಸ್ಥಾನದ ಮೊತ್ತ $= (5 \times 10^2 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10^2) \times 12 = 20400$.

(b) ಈಗ 2 ಎಂಬ ಅಂಕೆಯು ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ

ಬರಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅವು :– ಏಕ ; *2 : ಶತಕ : *4, 5, 6 : ದಶಕ : 5, 0, 6 ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $1 \times 3 \times 3 = 9$ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 2ನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 4,5,6 ಎಂಬ ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ 9 ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ $9+9+9+9=36$ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗುರುತಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಉಳಿದ 12 [$=48-36$] ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಂಕೆಯು ಬರುತ್ತವೆ ? ಅದು ಸೊನ್ನೆಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. [ಏಕೆ ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ]. ಆದ್ದರಿಂದ, ಏಕಸ್ಥಾನದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ $=(2+4+5+6) \times 9 = 153$ ಎಂದಾಯಿತು.

(c) ದಶಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ $=(2 \times 10 + 4 \times 10 + 5 \times 10 + 6 \times 10) \times 9 = 1530$ ಎಂದು, ಮೇಲಿನ ವಾದಸರಣಿಯಲ್ಲಿ 'ಏಕ' ಎಂದಿರುವ ಕಡೆಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ದಶಕ ಎಂದು ಓದಿಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತ $= 20400 + 153 + 1530 = 220583$.

11.12 **ಉದಾ :** 1, 2, 2, 3, 5, ಈ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ 5 ಅಂಕೆಗಳಿರುವ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ ? ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಪಡೆದ 13252 ಎಂಬ ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಏಕ ಮತ್ತು ಶತಕಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು [2] ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿದರೆ, ಮತ್ತೆ 13252 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಬರುತ್ತದೆ [ಏಕೆ ?]. ಇದು ನಾವು ಮೊದಲು ಪರಿಶೀಲನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ P ಆದರೆ, ಅದು 5 ವಿವಿಧ ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾದ $5P_5$ ಗಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಈಗ 13252 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ 1, 3, 5 ಎಂಬ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟು, ಉಳಿದ 2, 2 ಅಂಕೆಗಳ ಬದಲು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು, ಉದಾಹರಣೆಗೆ a, b ಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಅಳವಡಿಸಿದರೆ 13a 5b

* 11.11 ಉದಾ : ದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಮತ್ತು 13b 5a ಎಂಬ $_2P_2$ ವಿವಿಧ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ದೊರೆಕುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಬರುವ 2, 2 ಎಂಬ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಅಳವಡಿಸಿದರೆ, ಎಲ್ಲ ಅಂಕೆಗಳೂ ಭಿನ್ನವಿರುವ 5 ಅಂಕೆಗಳ $P \times {_2P_2} = P \times (2!)$ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ $_5P_5 = P \times \lfloor 2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore P = \frac{5!}{2!}$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

11.13 ಪ್ರಮೇಯ : n ವಸ್ತುಗಳ ಪೈಕಿ p ವಸ್ತುಗಳು 1ನೆಯ ರೀತಿಯವು, q ವಸ್ತುಗಳು 2ನೆಯ ರೀತಿಯವು ಮತ್ತು r ವಸ್ತುಗಳು 3ನೆಯ ರೀತಿಯವು,.... ...., ಮತ್ತು ಉಳಿದ ವಸ್ತುಗಳು ಭಿನ್ನವಿರುವಾಗ್ಯ ಎಲ್ಲಾ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಅರಿಸಿದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ P ಆದರೆ,

$$P = \frac{n!}{p!\,q!\,r!} \qquad (11\cdot13\cdot1)$$

ಉದಾ : AGRICULTURE ಎಂಬ ಪದದ ಎಲ್ಲಾ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಆರಿಸಿದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ವತ್ತ ಪದದಲ್ಲಿ 11 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ಅಕ್ಷರಗಳೆಂದರೆ : R, ಎರಡುಸಾರಿ ; U, ಎರಡುಸಾರಿ : ಉಳಿದವು ಭಿನ್ನ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ : $\lfloor 11 / \lfloor 2 \times \lfloor 2$.

11.13 **ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು :** ಒಂದು ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ 6 ಕುರ್ಚಿಗಳಿವೆ ; ಈ ಕುರ್ಚಿಗಳಲ್ಲಿ 6 ಹುಡುಗರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಈಗ ಬಿಡಿಸೋಣ. ಯಾವುದೇ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನನ್ನು, ಒಂದು ಕುರ್ಚಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಕೂಡಿಸಿ, ಉಳಿದ ಹುಡುಗರನ್ನು ಉಳಿದ 5 ಕುರ್ಚಿಗಳಲ್ಲಿ $5P_5 = 5!$ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು. ಈ 5!

ಏರ್ಪಾಟುಗಳಲ್ಲದೇ, ಬೇರೆ ಯಾವ ಏರ್ಪಾಟು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ– [ಏಕೆಂದರೆ, ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತ ಕುರ್ಚಿಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಕುರ್ಚಿ ಯಾವುದು? ಕೊನೆಯ ಕುರ್ಚಿ ಯಾವುದು? ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಅಸಮಂಜಸ].

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ n ಬೇರೆ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ $|\underline{n-1}$ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $|\underline{n-1}$.

ಈ $|\underline{n-1}$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಮತ್ತು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಜೋಡಣೆಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಮತ್ತು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಗಳ ಜೋಡಣೆಗಳು ಭಿನ್ನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸದಿದ್ದಾಗ r ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{2}|\underline{n-1}$ ಆಗುತ್ತದೆ [ಏಕೆ]. ಆದ್ದರಿಂದ 10 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಮಣಿಗಳಿಂದ $\frac{1}{2}|\underline{10-1} = \frac{1}{2} \times |\underline{9}$ ವಿವಿಧ ಹಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. (i) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$_{12}P_5$, $_6P_2$, $_{10}P_1$, $_{60}P_5$, $_{25}P_6$.

(ii) ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: $_4P_1 + {}_4P_2 + {}_4P_3 + {}_4P_4$

2. 5, 4, 2, 7, 1 ಎಂಬ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ, ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಕ್ರಮ ಬಿಟ್ಟಿರುವಾಗ 4 ಅಂಕೆಗಳಿರುವ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ? ಹೀಗೆ ರಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ, ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳೂ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ (i) ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ? (ii) ಎಷ್ಟು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ? (iii) ಎಷ್ಟು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ? (iv) ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5ನ್ನು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಪಡೆದಿವೆ? (v) ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 421ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇವೆ? (vi) ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 421ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಇವೆ? (vii) ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

3. ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು 7ರ ಬದಲು 0ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು–ಅಂದರೆ 5, 4, 2, 0, 1 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿ.

4. FATIGUE ಪದದ ಎಲ್ಲಾ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಆರಿಸಿದಂತಹ ಎಷ್ಟು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಿವೆ ? ಇದರಲ್ಲಿ F ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ? E ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಮುಕ್ತಾಯವಾಗುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಷ್ಟು ? I ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ T ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಮುಕ್ತಾಯವಾಗುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳೆಷ್ಟು ?

5. 3, 2, 7, 9, 8 ಎಂಬ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 4 ಅಂಕೆಗಳ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ? ಹೀಗೆ ರಚಿಸಿದ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 3 ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆ ? ಇದರಿಂದ, ಮೇಲಿನಂತೆ ರಚಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು 9ರ ಬದಲು ಶೂನ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

7. ಸಾಲಾಗಿ 6 ಆಸನಗಳಿವೆ. ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಮತ್ತು 5 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಹುಡುಗಿಯರ ಪೈಕಿ ಒಬ್ಬ ಗೊತ್ತಾದ ಹುಡುಗಿಯು ತಾನು ಹುಡುಗನ ಪಕ್ಕದಲ್ಲೇ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಪಟ್ಟು ಹಿಡಿದರೆ, ಅವರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

8. ಒಂದು ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತ 10 ಕುರ್ಚಿಗಳಿವೆ. ಈ ಕುರ್ಚಿಗಳಲ್ಲಿ 10 ಹುಡುಗರನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ? ಇವರ ಪೈಕಿ ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗರು ಯಾವಾಗಲೂ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಹಟ ಹಿಡಿದರೆ, ಆಗ ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತ ಎಲ್ಲಾ ಹುಡುಗರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

9. 2, 5, 1, 1, 1, 4 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 6 ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

10. EXCELLENT ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಆರಿಸಿ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

11. ಆಂಗ್ಲ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ಯಾವುದೇ 3 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಮೊದಲ 3 ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಆರಿಸಿ, ಅನಂತರದ 4 ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ 4 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು [ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು] ಆರಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಲೈಸೆನ್ಸ್ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

12. ಸಾಲಾಗಿ ಇಟ್ಟಿರುವ 10 ಆಸನಗಳಲ್ಲಿ 10 ಜನರನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇವರ ಪೈಕಿ 3 ಜನರು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಪಟ್ಟು ಹಿಡಿದರೆ, ಎಲ್ಲರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

13. ಮೇಲೆ 11ನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಕ್ಷರ ಮತ್ತು ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

14. ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲಾ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಆರಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಿಂದ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, (i) BEAUTIFUL (ii) MATHEMATICS (iii) COLLEGE.

15. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ತನ್ನ ಬಳಿಯಿರುವ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಸಾಲಾಗಿ ಇಡಬಯಸುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಬಳಿ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 3, 5 ಮತ್ತು 4 ಇದ್ದರೆ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಬರುವಂತೆ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಜೋಡಣೆಗಳು ಸಾಧ್ಯ.

ವಿಕಲ್ಪಗಳು

11.14 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :** ದತ್ತವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವು 'ಯಾವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆ ?' ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ವಿಶೇಷ ಗಮನ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಬರುವ ಭಿನ್ನವಾದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿದಾಗ, ದತ್ತ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯೊಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಆಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. [11.5 ಟೀಕೆ ನೋಡಿರಿ]. **ವಸ್ತುಗಳ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಗಮನಕೊಡದೆ ಆರಿಸುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ವಿಕಲ್ಪ ಎಂದು ಹೆಸರು.**

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, a, b, c, d ಎಂಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ, 3 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು? ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ. a, b ಮತ್ತು c ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ಸಮಿತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಲು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಕ್ರಮ ಅಮುಖ್ಯ. ಅರ್ಥಾತ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು a,b,c ಅಥವಾ c,b,a ಅಥವಾ c,a,b ಎನ್ನುವ ಯಾವ

ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಿದರೂ, ಅಂತಹ ಆಯ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ಸಮಿತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದ 3 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಿವಿಧ ಸಮಿತಿಗಳು : (a, b, c) ; (a, b, d) ; (a, c, d) ಮತ್ತು (b, c, d) ಗಳಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ 3 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ 4 ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದಾಯ್ತು. ಅರ್ಥಾತ್ 4 ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ 3 ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4. ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ $4C_3 = 4$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ,

n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r, $(r \leq n)$ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಒಟ್ಟು ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ${}_nC_r$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

11.15 **ಪ್ರಮೇಯ :** $${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad 11.15,1$$

ಸಾಧನೆ : n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಒಂದು ವಿಕಲ್ಪವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ವಿಕಲ್ಪದಲ್ಲಿ ಬರುವ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮಲ್ಲೇ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ ${}_nP_r$ ಭಿನ್ನ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ${}_nC_r$ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಪೈಕಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದಲೂ, ನಮಗೆ n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ r ! ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ${}_nC_r$ ವಿಕಲ್ಪಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ಇಂತಹ ${}_nC_r \times (r!)$ ವಿವಿಧ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆಯೆಂದಾಯಿತು ಆದರೆ ಇದು n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆಗಿದೆ [ಏಕೆ ?] ಆದ್ದರಿಂದ :

$${}_nC_r \times (r!) = {}_nP_r$$

$$\therefore \; {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

11.16 **ಟೀಕೆ : ದತ್ತ n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಲ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು**

ಆರಿಸಿದಾಗ, (n–r) ವಸ್ತುಗಳು ಆರಿಸದೇ ಹಾಗೇ ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾರಿ (n–r) ವಸ್ತುಗಳನ್ನು n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿದಾಗ r ವಸ್ತುಗಳು ಆರಿಸದೇ ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದೋ ಅಷ್ಟೇ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ (n–r) ವಸ್ತುಗಳನ್ನು n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಆರಿಸಬಹುದು ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಯಿತು.
[ಅ–112.3 ನೋಡಿ]

$$\therefore \; {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \quad .... \quad (11.16.1)$$

ಇದರಲ್ಲಿ $r = n$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ: ${}_nC_n = {}_nC_0$
ಇದರಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿ $= 1$ ಇರುವುದರಿಂದ ${}_nC_0 = 1$ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

11.17 ಪ್ರಮೇಯ: $${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1} \quad .... \quad (11.17.1)$$

ಸಾಧನೆ: ದತ್ತ $n+1$ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು a, b, c, d, e.... ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಈ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ, r ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಕ್ಷರಗಳಿರುವಂತಹ ಒಟ್ಟು ${}_{n+1}C_r$ ವಿಕಲ್ಪಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ a ಎಂಬ ಅಕ್ಷರವು, ${}_{n+1}C_r$ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಪೈಕಿ, ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಕಲ್ಪವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಬರಬಹುದು ಅಥವಾ ಬರದೇ ಇರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ :

(o) ${}_{n+1}C_r$ = (a ಅಕ್ಷರವಿರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) + (a ಅಕ್ಷರವಿಲ್ಲದಿರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)

(i) ದತ್ತ (n+1) ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ, a ಅಕ್ಷರವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ ಉಳಿದ n ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ, r ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ${}_nC_r$ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ${}_{n+1}C_r$ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಪೈಕಿ a ಅಕ್ಷರವಿಲ್ಲದಿರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ${}_nC_r$ ಆಗುತ್ತವೆ.

(ii) ದತ್ತ (n+1) ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ a ಅಕ್ಷರವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ, ಉಳಿದ r ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ, (r–1) ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ${}_nC_{r-1}$ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ (r–1) ಅಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಕಲ್ಪದೊಡನೆ a ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ (n+1) ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಆರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ r ಅಕ್ಷರದ a

ಅಕ್ಷರವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಒಂದು ವಿಕಲ್ಪವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $_{n+1}C_r$ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಪೈಕಿ, a ಅಕ್ಷರವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಒಟ್ಟು ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $_nC_{r-1}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಸಮೀಕರಣ (o)ದ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ (i)ಮತ್ತು (ii)ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ :

$$_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}.$$

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಮತ್ತೊಂದು ಸಾಧನೆಗೆ ಅ–11.2.3 ನೋಡಿರಿ.

11.18 **ಉದಾ :** (i) $_7C_4$, $_{12}C_8$, $_{101}C_{99}$—ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ, $_7C_4 = {}_7C_{7-4}$ .... [(11.16.1)ರಂತೆ]

$$= {}_7C_3 = \frac{7P_3}{3!} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$$

$$_{12}C_8 = {}_{12}C_4 = \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} = 495.$$

$$_{101}C_{99} = {}_{101}C_2 = \frac{101 \cdot 100}{1 \times 2} = 5050.$$

(ii) $_nC_6 = {}_nC_{10}$ ಆದಾಗ $_nC_{11}$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$_nC_6 = {}_nC_{n-6} = {}_nC_{10} \quad .... \quad [\text{ದತ್ತ}]$$

$\therefore$ $n-6=10$ ಅಥವಾ $n=16$

$$\therefore {}_nC_{11} = {}_{16}C_{11} = {}_{16}C_5 = \frac{16.15.14.13.12}{1.2.3.4.5} = 4368.$$

(iii) $_{10}C_{r+2} = {}_{10}C_{2r-3}$ ಆದರೆ, r ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$_nC_{r_1} = {}_nC_{r_2}$ ಆದರೆ $r_1 = r_2$ ಅಥವಾ $r_1 = n - r_2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ದತ್ತ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ:

$r + 2 = 2r - 3$ ಅಥವಾ $r + 2 = 10 - (2r - 3)$

$\Rightarrow \quad 5 = r \qquad ,, \quad r + 2 = 10 - 2r + 3$

$\Rightarrow \quad 3r = 11$

$\Rightarrow \quad r = \frac{11}{3}$

ಇದು ಅಶಕ್ಯ

$\therefore \quad r = 5$

11.19 ಉದಾ : (i) 20 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 15 ಹುಡುಗಿಯರು ಇರುವ ಒಂದು ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ಸಂಘವನ್ನು ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಸಂಘದಿಂದ 4 ಹುಡುಗಿಯರು ಮತ್ತು 5 ಹುಡುಗರು ಇರುವ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ತಂಡಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ನಡೆಸಲು ಆರಿಸಬಹುದು ?

4 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು 15 ಹುಡುಗಿಯರಿಂದ $_{15}C_4$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ 4 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾರಿ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದನಂತರ, 5 ಹುಡುಗರನ್ನು 20 ಹುಡುಗರಿಂದ $_{20}C_5$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 11.2 ಮೂಲ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ 4 ಹುಡುಗಿಯರು ಮತ್ತು 5 ಹುಡುಗರು ಇರುವ,

$$_{15}C_4 \times {}_{20}C_5 = \frac{15!}{11! \times 4!} \times \frac{20!}{15! \times 5!}$$

$$= \frac{20!}{11! \times 4! \times 5!}$$

ವಿವಿಧ ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ತಂಡಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(ii) 4 ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು ಮತ್ತು 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇರುವ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯಿಂದ, ಕಡೇ ಪಕ್ಷ ಒಬ್ಬ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕನಾದರೂ ಇರುವಂತಹ 4 ಜನರ ಎಷ್ಟು ಉಪಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ?

ಈಗ ಬೇಕಾದ ಉಪಸಮಿತಿಯೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಲು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಬಹುದಾದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೋಡೋಣ :

ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಹುಡುಗರು ಸಂಖ್ಯೆ	ರಚಿಸಬಲ್ಲ ಉಪಸಮಿತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1	3	${}_4C_1 \times {}_8C_3 = 4 \times 56$
2	2	${}_4C_2 \times {}_9C_2 = 6 \times 28$
3	1	${}_4C_3 \times {}_8C_1 = 4 \times 8$
4	—	${}_4C_4 = 4$

∴ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ $= 224 + 168 + 32 + 4 = 428$.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ : ${}_4C_2$, ${}_{12}C_4$, ${}_{12}C_8$, ${}_{16}C_{11}$, ${}_{101}C_2$, ${}_nC_n$

2. (i) ${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5 - 1$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು
   (ii) ${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_r = 2^n - 1$
   ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

3. (11.16.1) ಮತ್ತು (11.17.1), ಇವುಗಳನ್ನು 11.15 ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4. $_nC_{12} = {}_nC_8$ ಆದರೆ, $_nC_{17} = 1140$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $_{22}C_n = 231$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5. $_{18}C_r = {}_{18}C_{r+2}$ ಆದರೆ $_rC_5 = 56$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. $_nC_6 = {}_nC_{10}$ ಆದರೆ $_nC_{11} = 4368$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. $_{20}C_{r+2} = {}_{20}C_{2r-3}$ ಆದಾಗ $r^2 - 12r + 75 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. $\dfrac{_{28}C_{2r}}{_{24}C_{2r-4}} = \dfrac{225}{11}$ ಆದಾಗ $r = 7$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

9. $\dfrac{2\ {}_nC_3}{_nC_2} = \dfrac{44}{3}$ ಆದರೆ $n = 6$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

10. $r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11. $_nC_r = \dfrac{n-r+1}{r}\ {}_nC_{r-1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ತನ್ಮೂಲಕ 11.15 ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12. a, b, c....ಎಂಬ n ವಿವಿಧ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಪೈಕಿ,

(i) ಎಷ್ಟು ವಿಕಲ್ಪಗಳಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಎರಡೂ ಅಕ್ಷರಗಳು ಬರುತ್ತವೆ ?

(ii) a ಅಕ್ಷರವು ಬಂದು b ಅಕ್ಷರವು ಬರದೇ ಇರುವಂತಹ ಎಷ್ಟು ವಿಕಲ್ಪಗಳಿವೆ ?

(iii) a ಮತ್ತು b, ಈ ಎರಡೂ ಅಕ್ಷರಗಳು ಬರದೇ ಇರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ತನ್ಮೂಲಕ,

$$_nC_r = {}_{n-2}C_{r-2} + 2\times {}_{n-2}C_{r-1} + {}_{n-2}C_r$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13. ಕೆಳಗಿನವು ಯುಕ್ತವಾದಾಗ nನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $_nC_5 = 5\,{}_nP_3$, (ii) $_nC_{n-4} = 35$.

14. $_nP_r = 24 \times {}_nC_r$ ಆದಾಗ $r = 4$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $_{15}C_{r+1} = {}_{15}C_{3r-1}$ ಆದಾಗ, $r = 3$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15. 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಿಂದ, 6 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತಂಡವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

16 ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪೈಕಿ 40 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 20 ಹುಡುಗಿಯರು ಇದ್ದಾರೆ. ಇವರಿಂದ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ 15 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನೊಳಗೊಂಡ, 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ತಂಡಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

17. ಒಂದು ಗಣಿತದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ A, B, C ಎಂಬ 3 ಭಾಗಗಳಿವೆ : ಈ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 5, 6, 6 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೂ 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲೇಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಉತ್ತರಿಸುವಾಗ A ಭಾಗದಿಂದ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ 2 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು B ಭಾಗದಿಂದ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ 3 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲೇಬೇಕು ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವಿದ್ದರೆ, ಯಾವುದೇ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಲ್ಲನು ?

18. 16 ಆಟಗಾರರಿರುವ ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಗೋಷ್ಠಿಯಲ್ಲಿ 6 ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 4 ವಿಕೆಟ್ ಕೀಪರ್‌ಗಳೂ ಇರುವಂತಹ ಹನ್ನೊಂದು ಜನರ ಎಷ್ಟು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

19. ಒಂದು ಕಾಗದದ ಮೇಲಿರುವ 12 ಬಿಂದುಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವ 3 ಬಿಂದುಗಳೂ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಿ ?

20. 20 ಜನ ಯಾತ್ರಿಕರು ಮತ್ತು 2 ದೋಣಿಗಳು ಇವೆ. ಚಿಕ್ಕದೋಣಿಯಲ್ಲಿ 10 ಜನರು ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ದೋಣಿಯಲ್ಲಿ 15 ಜನರು ಕೂಡಲು ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವಿದೆ. ದೊಡ್ಡದೋಣಿಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ 10 ಜನ ಯಾತ್ರಿಕರು ಕೂಡಲೇಬೇಕೆಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವಿರುವಾಗ, ಎಲ್ಲಾ ಯಾತ್ರಿಕರು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಹೊಳೆಯನ್ನು ದಾಟಬಲ್ಲರು ?

12

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ

12.1 ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು **ದ್ವಿಪದ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $a+b$, $2x^2y-3pq$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ, ಒಂದೊಂದು ದ್ವಿಪದವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಘಾತಗಳನ್ನು **ದ್ವಿಪದ-ಘಾತ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ದ್ವಿಪದದ ಘಾತ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ ಅದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮುಂದೆ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೆಲವು ದ್ವಿಪದ- ಘಾತಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಅವಲೋಕಿಸೋಣ.

(i) $(a+b)^1 = a+b$

$$= 1a^{1-0}b^0 + 1a^0b^1$$

$$= {}_1C_0a^{1-0}b^0 + {}_1C_1a^{1-1}b^1$$

$$= \sum_{r=0}^{1} {}_1C_r\; a^{1-r}\; b^r \quad \ldots\ldots \qquad [\text{ಏಕೆ?}]$$

(ii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= 1a^{2-0}b^0 + 2a^{2-1}b^1 + 1a^{2-2}b^2$$

$$= {}_2C_0a^{2-0}b^0 + {}_2C_1a^{2-1}b^1 + {}_2C_2a^{2-2}b^2$$

$$= \sum_{r=0}^{2}{}^{2}{}_2C_r\; a^{2-r}b_r$$

(iii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= {}_3C_0a^{3-0}b^0 + {}_3C_1a^{3-1}b^1 + {}_3C_2a^{3-2}b^2 + {}_3C_3\; a^{3-3}b^3$$

$$= \sum_{r=0}^{3} {}_3C_r\; a^{3-r}\; b^r$$

(iv) $(a+b)^4 = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)$ [ಏಕೆ?]

$$= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$= {}_4C_0a^{4-0}b^0+{}_4C_1a^{4-1}b^1+{}_4C_2a^{4-2}b^2+{}_4C_3a^{4-3}b^3+{}_4C_4b^4$$

$$= \sum_{r=0}^{4} {}_4C_r\ a^{4-r}\ b^r$$

ಈ ದ್ವಿಪದದ ಘಾತಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಅವಲೋಕನೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : $(a+b)$ ದ್ವಿಪದದ nನೆಯ ಘಾತ, n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ, ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿರಬಹುದು—

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^{n-0}b^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\dots\dots+{}_nC_r\ a^{n-r}b^r+\dots+{}_nC_{n-1}\ a^{n-(n-1)}b^{n-1}+{}_nC_n\ a^{n-n}b^n$$

$$= \sum_{n=0}^{n} {}_nC_r\ a^{n-r}b^r$$

ಈ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ಸಮಂಜಸವೆಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

12.2 ಪ್ರಮೇಯ : n ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ,

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^{n-0}b^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\dots+{}_nC_r\ a^{n-r}b^r+\dots+{}_nC_{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1}+{}_nC_r\ a^{n-n}b^n \quad \dots (12.2.1)$$

ಸಾಧನೆ : ಪ್ರಥಮ ವಿಧಾನ : ಮೊದಲು $(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\dots n$ ಆವರಣಗಳು, ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಈ ಘಾತದಲ್ಲಿ

ಬರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆವರಣದಿಂದ a ಅಥವಾ b ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದನ್ನು ಆರಿಸಿ ಗುಣಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿಸಾರಿ r ಆವರಣಗಳಿಂದ b ಯನ್ನು ಆರಿಸಿ, ಉಳಿದ (n-r) ಆವರಣಗಳಿಂದ aಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಗುಣಿಸಿದಾಗ $b^r a^{n-r}$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದು ಒಂದು ವಿಕಲ್ಪದ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. r bಗಳನ್ನು n ಆವರಣಗಳಿಂದ ${}_nC_r$ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ಸರಿಯಷ್ಟೆ; ಈ ರೀತಿ bಯನ್ನು ಯಾವುದೇ r ಆವರಣಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿ, ಇದನ್ನವಲಂಬಿಸಿದಂತೆ ಉಳಿದ n-r ಆವರಣಗಳಿಂದ aಯನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 11.2 ಮೂಲಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ $b^r a^{n-r}$ ಅಥವಾ $a^{n-r}b^n$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ${}_nC_r \times 1 = {}_nC_r$ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$ {}_nC_r \; a^{n-r}b^r \qquad \ldots \qquad (12.2.2) $$

ಎಂಬ ಪದವು $(a+b)^n$ ಘಾತದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆಂದಾಯ್ತು. ಇದು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ (12.2.1)ರ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ $(r+1)$ನೆಯ ಪದವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. (12.2.2)ರಲ್ಲಿ r ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳೆಂದರೆ, ಅವು $0,1,2,3,\ldots,n$ ಆಗಿವೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು rಗೆ ಕ್ರಮಾನುಗತವಾಗಿ ಕೊಡುವುದರಿಂದ, ${}_nC_0 a^{n-0}b^0$, ${}_nC_1 a^{n-1}b^1$, ${}_nC_2 a^{n-2}b^2$, ${}_nC_3 a^{n-3}b^3, \ldots, {}_nC_r \; a^{n-n}b^r$ ಎಂಬ ಪದಗಳು, ಅಂದರೆ (12.2.1)ರ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯು ಮುಕ್ತಾಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ದ್ವಿತೀಯ ವಿಧಾನ : (12.2.1)ನ್ನು $\sum$ಸಂಕೇತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$$ (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \; a^{n-r}b^r \qquad \ldots \qquad (12.2.1) $$

ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು n ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೂ

ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಗಣಿತಾನುಗಮನ ರೀತಿ ಸಾಧಿಸಿ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡುತ್ತೇನೆ. $n=1$ ಆದಾಗ, (12.2.1¹)ರಲ್ಲಿ ಬಲಬದಿ –

$$\sum_{r=0}^{1} {}_1C_r a^{1-r} b^r = {}_1C_0 a^{1-0} b^0 + {}_1C_1 a^{1-1} b^1 = 1 \cdot a^1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b^1 =$$

$a+b=(a+b)^1=$ ಎಡಬದಿ. ಅಂದರೆ $n=1$ ಆದಾಗ, (12.2.1¹) ಸಮಂಜಸವೇ ಆಯಿತು. ಇದರಿಂದ (12.2.1¹)ನ್ನು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ S ಎಂದರೆ, $1 \in S$ ಎಂದಾಯಿತು. ಈಗ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು N ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ :

(i) $1 \in S \subset N$

ಈಗ $p \in S$ ಎಂದು ಭಾವಿಸುವುದರಿಂದ :

(ii) $$(a+b)^p = \sum_{r=0}^{p} {}_pC_r \, a^{p-r} b^r$$

$a \times$ (ii): ಇದರಿಂದ : $$a(a+b)^p = a\sum_{r=0}^{p} {}_pC_r \, a^{p-r} b^r$$

$$= \sum_{r=0}^{p} a \cdot {}_pC_r \, a^{p-r} b^r$$

$$= \sum_{r=0}^{p} {}_pC_r \, a^{p-r+1} \, b^r$$

(iii) $$\therefore \quad a(a+b)^p = \sum_{r=1}^{p} {}_pC_r \, a^{p-r+1} \, b^r + {}_pC_0 a^{p+1}$$

$b \times$ (ii) ; ಇದರಿಂದ : $$b(a+b)^p = b\sum_{r=0}^{p} {}_pC_r \, a^{p-r} \, b^r$$

$$= \sum_{r=0}^{p} {}_pC_r \, a^{p-r} b \cdot b_r \qquad = \sum_{r=0}^{p} C^r \, a^{p-r} b^{r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{p+1} {}_pC_{r-1} a^{p-(r-1)} b^r$$ ....[ಅ–8.5.3 ನೋಡಿರಿ.]

(iv) $\therefore \quad b(a+b)^p = \sum_{r=1}^{p} {}_pC_{r-1} a^{p-r+1} b^r + {}_pC_p\ a^0 b^{p+1}$

(iii)+(iv): ಇದರಿಂದ: $a(a+b)^p + b(a+b)^p$

$$= \sum_{r=1}^{p} {}_pC_r\ a^{p-r+1} b^r + {}_pC_0 a^{p+1} + \sum_{r=1}^{p} {}_pC_{r-1}\ a^{p-r+1} b^r + {}_pC_p\ a^0 b^{p+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \{ {}_pC_r a^{p-r+1} b^r + {}_pC_{r-1} a^{p-r+1} b^r \} + {}_pC_0 a^{p+1} + {}_pC_p\ b^{p+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{p} ({}_pC_r + {}_pC_{r-1}) a^{p-r+1} b^r + {}_{p+1}C_0 a^{p+1} + {}_{p+1}C_{p+1}\ b^{p+1}$$

$$= \sum_{r=1} {}_{p+1}C_r\ a^{p+1-r} b^r + {}_{p+1}C_0 a^{p+1-0} b^0 + {}_{p+1}C_{p+1}\ a^0\ b^{p+1}$$

[ಏಕೆ ? (11.17 1) ನೋಡಿರಿ]

$$= \sum_{r=0}^{p+1} {}_{p+1}C_r\ a^{p+1-r}\ b^r \qquad \text{[ಏಕೆ?]}$$

ಈಗ $n = p+1$ ಎಂದು (12.2.1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

(v) $p \in S$ ಆದಾಗ $p+1 \in S$, ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(i) ಮತ್ತು (v) ರಿಂದ $S = N$.[ಏಕೆ ? 10.1 ನೋಡಿರಿ.]

ಅಂದರೆ n ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೂ. (12.2.1) ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಇದರಿಂದ ಸಾಧನೆಯು ಪೂರ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

12.3 **ಟೀಕೆ :** (12.2.1) ರಲ್ಲಿರುವ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಈಗ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ:

(i) $(a+b)^n$ **ಘಾತದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ** $(n+1)$ **ಪದಗಳಿವೆ; ಅಂದರೆ ಘಾತಾಂಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಅಧಿಕ.**

(ii) **ಯಾವುದೇ ಪದದಲ್ಲಿ ಬರುವ a ಮತ್ತು b ಗಳ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ n.**

(iii) **ವಿಸ್ತರಣೆಯ rನೆಯ ಪದವನ್ನು** t_r **ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ,** $(r+1)$ **ನೆಯ ಪದವು**

$$t_{r+1} = {}_nC_r \ a^{n-r} \ b^r \quad \ldots \qquad (12.3.1)$$

ಆಗಿದೆ. ಈ ಪದದಲ್ಲಿ, ಅಂದರೆ $(n+1)$**ನೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕ, aಯ ಘಾತಾಂಕ ಮತ್ತು bಯ ಘಾತಾಂಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ** ${}_nC_r$ $n-r$ **ಮತ್ತು r ಎಂಬುವನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.**

(iv) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ **ಇರುವುದರಿಂದ, ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಕಗಳು ಶುರುವಿನಿಂದ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯಿಂದ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.**

12.4 **ಟೀಕೆ:**

$$(a-b)^n = \{a+(-b)\}^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \ a^{n-r}(-b)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \ a^{n-r}(-1 \cdot b)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \ {}_nC_r \ a^{n-r} b^r$$

$\therefore \quad (a-b)^n = (-1)^0 \; {}_nC_0 a^{n-0} b^0 + (-1)^1 \; {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + (-1)^2$
${}_rC_2 a^{n-2} b^2 + (-1)^3 C_3 a^{n-3} b^3 + (-1)^4 \; {}_nC_4 a^{n-4} b^4 + \ldots$
$= {}_nC_o \; a^{n-0} b^o - {}_nC_1 \; a^{n-1} \; b^1 + {}_nC_2 \; a^{n-2} \; b^2$
$- {}_nC_3 \; a^{n-3} \; b^3 + {}^nC_4 a^{n-4} b^4 - \ldots\ldots (n+1)$

ಪದಗಳು, ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ ; $(a-b)^n$ ಘಾತದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಯು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಧನ ಮತ್ತು ಋಣ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದದ ಚಿಹ್ನೆ ಧನವೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

12.5 **ಉದಾ :** ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ. *(i)* $(x+2y)^6$ *(ii)* $(2a-x)^6$

(i) ಈಗ $(x+2y)^6 = \{x+(2y)\}^6$, ಇರುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು (12.2.1) ರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ, $a=x$, $b=2y$ ಮತ್ತು $n=6$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ :

$$(x+2y)^6 = {}_6C_0(x)^0(2y)^6 + {}_6C_1(x)^{6-1}(2y)^1 + {}_6C_2(x)^{6-2}(2y)^2 + {}_6C_3(x)^{6-3}(2y)^3 + {}_6C_4(x)^{6-4}(2y)^4 + {}_6C_5(x)^{6-5}(2y)^5 + {}_6C_6(x)^{6-6}(2y)^6.$$

ಆದರೆ, ${}_6C_0 = {}_6C_6 = 1$, ${}_6C_1 = {}_6C_5 = {}_6C_2 = {}_6C_4 = 15$ ಮತ್ತು ${}_6C_3 = 20$ ಎಂದಿರುವುದರಿಂದ,

$$(x+2y)^6 = 1.x^6.1 + 6x^5(2y) + 15x^4(2y)^2 + 20x^3(2y)^3 + 15x^2(2y)^4 + 6x\,(2y)^5 + 1.1.(2y)^6.$$
$$= x^6 + 12x^5y + 60x^4y^2 + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192xy^5 + 64y^6.$$

(ii) ಈಗ $(2a-x) = -1 \cdot (x-2a)$ ಇರುವುದರಿಂದ,
$(2a-x)^6 = \{-1 \cdot (x-2a)\}^6 = (-1)^6 (x-2a)^6$

12.4 **ಟೀಕೆಯಿಂದ :** $= (x-2a)^6.$

$$(x-2a)^6 = {}_6C_0(x)^{6-0}(2a)^0 - {}_6C_1(x)^{6-1}(2a)^1 + {}_6C_2(x)^{6-2}$$

$(2a)^2 - {}_6C_3(x)^{6-3}(2a)^3 + {}_6C_4(x)^{6-4}(2a)^4 - {}_6C_5(x)^{6-5}(2a)^5 + {}_6C_6(x)^{6-6}(2a)^6$

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರುವಂತೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದರಿಂದ ;

$$(x-2a)^6 = x^6 - 12x^5a + 60x^4a^2 - 160x^3a^3 + 240x^2a^4 - 192\,xa^5 + 64a^6$$

12.6 ಉದಾ : $(\sqrt{2}+1)^5 - (\sqrt{2}-1)^5 = 82$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಈಗ, $(\sqrt{2}+1)^5 = {}_5C_1\sqrt{2}^{5-1}1^1 + {}_5C_2\sqrt{2}^{5-2} + {}_5C_3\sqrt{2}^{5-3}1^3 + {}_5C_4\sqrt{2}^{5-4}1^2 + {}_5C_5\sqrt{2}^{5-5}1^5$

$\therefore\ (\sqrt{2}+1)^5 = \sqrt{2}^5 + {}_5C_1\sqrt{2}^4 + {}_5C_2\sqrt{2}^3 + {}_5C_3\sqrt{2}^2 + {}_5C_4\sqrt{2}^2 + {}_5C_5 - 1$

$\therefore\ (\sqrt{2}-1)^5 - = \sqrt{2}^5 - {}_5C_1\sqrt{2}^4 + {}_5C_2\sqrt{2}^3 - {}_5C_3\sqrt{2}^2 + {}_5C_4\sqrt{2} - {}_5C_5 \cdot 1$

$\therefore\ (\sqrt{2}+1)^5 - (\sqrt{2}-1)^5 = 2 \cdot {}_5C_1\sqrt{2}^4 + 2 \cdot {}_5C_3\sqrt{2}^2 + 2 \cdot {}_5C_5 \cdot 1 = 2.5.2^2 + \frac{2.5.4.3.2}{1.2.3} + 2.1.1$

$= 40 + 40 + 2 = 82$

12.7 ಉದಾ : ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ $(1.08)^4$ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ $1.08 = 1 + .08$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

$\therefore (1.08)^4 = (1 + .08)^4$

$= 1 + {}_4C_1 \times 1x^{4-1}(0.08))^1 + {}_4C_2 \times 1^{4-2} \times (0.08)^{4-2} + {}_4C_3 \times 1^{4-3} \times (0.08)^3 + {}_4C_4 \times 1^{4-4} \times (0.08)^4$

$= 1 + 4 \times 0.08 + 6 \times (0.08)^2 + 4 \times (0.08)^3 + \ldots\ \ldots$

$\doteq 1+0.32+0.0384+0.000256$

$\doteq 1.358656$

$\doteq 1.3587.$

12.8 ಉದಾ: $\left(4x^3- \frac{1}{2x}\right)^{12}$

ಘಾತದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿನ 8 ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ, $a=4x^3$, $-b = -\frac{1}{2x}$, $n=12$

$t_{r+1} = (-1)^r \ {}_nC_r \ a^{n-r} b^r$ [12.4 ಟೀಕೆಯಿಂದ]

$= (-1)^r \ {}_{12}C_r \ (4x^3)^{12-r} \left(\frac{1}{2x}\right) = (r+1)$ ನೇ ಪದ.

ಇದರಲ್ಲಿ $r=7$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, 8 ನೇ ಪದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ,

$\therefore \quad t_8 = t_7+_1 = (-1)^7 \ 12C_7 \ (4x^3)^{12-7} \left(\frac{1}{2x}\right)^7$

$= -\ {}_{12}C_5 . 4^5 . x^{15} \ \frac{1}{2^7, \ x^7}$

$= - \ \frac{12.11.10.9.8.}{1.2.3.4.5.} \ \frac{x^{15-7}}{2^7}$

$= -\ 6336 \ x^8.$

12.9 ಉದಾ: ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ x— ರಹಿತವಾದ ಪದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$(r+1)$ ನೆಯ ಪದ $= t_{r+1}$

$= (-1)^r \ {}_{12}C_r \ (4x^3)^{12-r} \left(\frac{1}{2x}\right)^r$

$$= (-1)^r \ {}_{12}C_r \ 4^{12-r} \ x^{3(12-r)} \ \frac{1}{2^r x^r}$$

$$= \left\{ (-1)^r \ {}^{12}C_r \ \frac{4^{12-r}}{2^r} \right\} x^{36-3r-r}$$

ಇಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಾವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಪದವು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ, $(r+1)$ ನೆಯ ಪದವು x— ರಹಿತವಾಗಬೇಕಾದರೆ, $x^{36-3r-r} = 1$ ಆಗಲೇ ಬೇಕು, ಅಂದರೆ $36-3r-r = 0$ ಅಥವಾ $36 = 4r \Rightarrow r = 9$ ಆಗಲೇಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $t_{9+1} = t_{10} =$ 10ನೇಯ ಪದವು x ರಹಿತ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಪದ $= (-1)^9 \ {}_{12}C_9 \ 4^{12-9} = 27.5.$

12.10 **ಉದಾ :** $\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right)^{15}$ ಎಂಬ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x^{32} ಇರುವ ಪದವು ಬರುತ್ತದೆಯೇ ? ಹಾಗಾದರೆ, ಅದರ ಗುಣಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\text{ಇಲ್ಲಿ, } t_{r+1} = (-1)^r \ {}_{15}C_r \ (x^4)^{15-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r$$

$$= (-1)^r \ {}_{15}C_r \ \frac{x^{60-4r}}{x^{3r}}$$

$$= (-1)^r \ {}_{15}C_r \ x^{60-7r}$$

ಇದರಲ್ಲಿ x ನ ಘಾತಾಂಕ $= 60-7r = 32$ ಆದಾಗ, $(r+1)$ ನೇಯ ಪದದಲ್ಲಿ x^{32} ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $60 - 32 = 7r$ ಅಥವಾ $28 = 7r$. $\therefore \ r = 4 \Rightarrow t_{r+1} =$ 5ನೇ ಪದ. ಆದ್ದರಿಂದ x^{32} ಇರುವ ಪದದ ಗುಣಕ $= (-1)^4 \ {}_{15}C_4 = 1365.$

12.11 **ಉದಾ :** $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{14}$ ಎಂಬ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಮಧ್ಯ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ $14+1 = 15$ ಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು $7+1+7 = 15$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 8ನೆಯ ಪದವು ಮಧ್ಯ ಪದವೆಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎಂಟನೆಯ ಪದ,

$$t_8 = t_{7+1} = (-1)^7 \cdot {}_{14}C_7 \ (1)^{14-1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{7}$$

$$= \quad - {}_{14}C_7 \ \frac{x^{14}}{2^7} = - \frac{429}{16} x^{14}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ:

(i) $(1+x)^7$. (ii) $(x+a)^6$. (iii) $(x-3)^5$

(iv) $(3x+2y)^4$ (v) $(2x+y)^6$ (vi) $(2x-3y)^5$

(vii) $(a^{-1}+b^{2})^6$ (viii) $\left(\frac{a}{2b} - \frac{2b}{a}\right)^6$

(ix) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^4$ (x) $\left(2x - \frac{1}{2}y\right)^5$

(xi) $(1-x)^n$.

2. ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭರೂಪದಲ್ಲಿಡಿರಿ:

(i) $\left(\frac{x}{x} - \frac{y}{y}\right)^7$ ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದಗಳು; (ii) $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^{01}$, ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದ :

(iii) $(x^2-x)^{23}$, ಇದರಲ್ಲಿ 21 ನೆಯ ಪದ, (iv) $(y-2)^7$, ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದಗಳು;

(v) $\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)^{14}$, ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯ ಪದ;

(vi) $(2x-3)^{16}$, ಇದರಲ್ಲಿ 11 ನೆ ಪದ;

(vii) $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{11}$, ಇದರಲ್ಲಿ x^7 ಇರುವ ಪದ;

(viii) $\left(3+\frac{2}{x}\right)^{10}$, ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದ;

(ix) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{7}$, ಇದರಲ್ಲಿ x^5 ಇರುವ ಪದ;

(x) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$, ಇದರಲ್ಲಿ x^{10} ಇರುವ ಪದ;

3. ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ x ರಹಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $\left(x-\frac{5}{x^3}\right)^8$. (ii) $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{10}$.

(iii) $\left(2x^2-\frac{1}{x^2}\right)^8$ (iv) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$

(v) $(2x-2x^{-2})^{12}$.

(vi) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ (vii) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^{2n}$

(viii) $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ (ix) $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$

4. ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಘಾತಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ :

(i) $(3x-2)^{15}$ ದಲ್ಲಿ x^9.

(ii) $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ ದಲ್ಲಿ x^{32} ಮತ್ತು x^{-17}.

(iii) $(2+x)^{12}$ ದಲ್ಲಿ x^7.   (iv) $(x-2y)^{13}$ ದಲ್ಲಿ x^{11}.

(v) $(ax^4-bx)^9$ ದಲ್ಲಿ x^{18}.   (vi) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^7$ ದಲ್ಲಿ x^3.

(vii) $(2x^2-x)^{10}$ ದಲ್ಲಿ x^{16}.

(viii) $\left(y^2+\frac{C^3}{y}\right)$ ದಲ್ಲಿ y.

5. $(1-0.01)^5$, ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ ; ತನ್ಮೂಲಕ $(0.99)^5$ ಘಾತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೂರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ $(101)^3 = 10, 30, 301$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $(1.01)^4$ ಮತ್ತು $(1.03)^8$ ಎಂಬ ಘಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ಸೂಚನೆ : 5ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.]

8. $(\sqrt{5}+1)^5-(\sqrt{5}-1)^5 = 352$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. $(2+\sqrt{3})^7-(2-\sqrt{3})^7 = 10084$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10. $\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{n!}$ ಎಂಬ ಪದವು $(x+\frac{1}{x})^{2n}$ ಘಾತದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11. $n\left(y^2 - \frac{y^3}{x}\right)^{10}$ ಎಂಬ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x^{12} ಇರುವ ಪದವು ಇರುವುದೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

12. $(1+x)^n$ ಎಂಬ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಪದಗಳಲ್ಲಿನ ಗುಣಕಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ $(n-2)$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ ದಲ್ಲಿ x^r ನ ಗುಣಕ $\dfrac{n!}{\{\frac{1}{2}(n-r)\}!\,\{\frac{1}{2}(n+r)\}!}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12.12 n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ $(1+x)^n$ ನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ :

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \, (1)^{n-r} x^r = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \, x^r$$

$$= {}_nC_0 x^0 + {}_nC_1 x + \dots + {}_nC_r \, x^r + \dots + {}_nC_n \, x^n \qquad (12.12.1)$$

ಮೇಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_r$,…. , ${}_nC_r$, ……. ಗಳನ್ನು **n ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ದ್ವಿಪದ ಗುಣಕಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ C_0, C_1, C_2……. C_r ….,C_n ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಸ್ತರಣೆಯ r ನೆಯ ಪದವನ್ನು t_r ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{{}_nC_r \, x^r}{{}_nC_{r-1} x^{r-1}} = \frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-8}} . x$$

$$= \frac{(-r+1)}{r} . \frac{{}_nC_{r-1}}{{}_nC_{r-1}} . x \quad \text{[ಅ-11.2.11ನೋಡಿರಿ]}$$

$$= \frac{n-r+1}{r} \cdot x$$

$$\therefore \quad \frac{t_{r+1}}{t_r} \gtreqless 1, \text{ ಆ ಆ ಮಾತ್ರ}, \quad \frac{n-r+1}{r} . x \gtreqless 1 \ldots (12.2.2)$$

x ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ, (12. 12. 2)ರ ಸಹಾಯದಿಂದ, (12. 12. 1)ರ ಗರಿಷ್ಠ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

12·13 **ಉದಾ** : $(3+2x)^8$ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ $x = \frac{1}{2}$ ಆದಾಗ, ಗರಿಷ್ಠ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ $(3+2x)^8 = \{ 3(1+\frac{2}{3}x) \}^8$

$= 3^8 (1+\frac{2}{3}x)^8$

$= 3^8 (1+y)^8$, ಇಲ್ಲಿ $y = \frac{2}{3}x$

$x = \frac{1}{2}$ ಆದಾಗ, $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

ಈಗ $(1+y)^8$ನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ rನೆಯ ಪದವನ್ನು t_r ಎಂದು ಕರೆದರೆ,

$$\therefore \frac{t_{r+1}}{t_r} \gtreqless 1, \text{ ಆ ಆ ಮಾತ್ರ}, \quad \frac{8-r+1}{r} y \gtreqless 1$$

$$\Rightarrow \quad ,, \quad - \quad ,, \quad - \quad \frac{9-r}{r} \cdot \frac{1}{3} \gtreqless 1$$

$$\Rightarrow \quad ,, \quad - \quad ,, \quad - \quad 9-r \gtreqless 3r$$

$$\Rightarrow \quad ,, \quad - \quad ,, \quad - \quad 9 \lesseqgtr 4r$$

$$\therefore \quad \frac{t_{r+1}}{t_r} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \gtreqless r.$$

$$\therefore \quad r=1 \text{ ಆದಾಗ, } 2\frac{1}{4} > 1 \Rightarrow t_2 > t_1$$

$$r=2 \quad ,, \quad 2\frac{1}{4} > 2 \Rightarrow t_3 > t_2$$

$$r=3 \quad ,, \quad 2\frac{1}{4} < 3 \Rightarrow t_4 < t_3$$

$$r=4 \quad ,, \quad 2\frac{1}{4} < 4 \Rightarrow t_5 < t_4$$

$$\therefore \quad \dots\dots t_5 < t_4 < t_3 > t_2 > t_1.$$

ಆದ್ದರಿಂದ t_3 ಅರ್ಥಾತ್ ಮೂರನೆಯ ಪದವು ಗರಿಷ್ಠ ಪದವೆಂಬುದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪದದ ಬೆಲೆ :

$$t_{2+1} = {}_8C_2\, y^2 = \frac{8.7}{1.2}\,\frac{1}{3^2}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಗರಿಷ್ಠಪದ} = \frac{3^8 \times 8 \times 7}{1 \times 2} \times \frac{1}{3^2} = 20412.$$

12.14 nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ದ್ವಿಪದ ಗುಣಕಗಳೊಡನೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳು :

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n \dots (12.14.1)$ ಎಂಬುದನ್ನು 12.12 ರಲ್ಲಿ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಾನುಗತವಾಗಿ, $x=1, -1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸೋಣ ಇದರಿಂದ :

$$(1+1)^n = 2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad \dots (12.14.2)$$

$$(1-1)^n = 0^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots + (-1)^n C_n$$

$$\therefore \quad C_0+C_2+C_4+.... = C_1+C_3+C_5+ ....$$

ಎರಡು ಬದಿಗೂ $C_0+C_2+C_4+ ....$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ :

$$2C_0+2C_2+2C_4+ .... = C_0+C_1+C_2+C_3+C_4+ C_5+ .... = 2^n \quad [(12.14.2)\text{ರಿಂದ}]$$

$$\therefore \ 2(C_0+C_2+C_4+ ....) = 2^n$$

$$\Rightarrow \ C_0+C_2+C_4+ .... = \frac{2n}{2} = 2^{n-1}$$

$$\therefore \ C_0+C_2+C_4+ .... = C_1+C_3+C_5+ ... = 2^{n-1}$$

12.15 **ಉದಾ :** $C_0^2+C_1^2+C_2^2+ .... + C_n^2 = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

$$(1+x)^n = C_0+C_1x+C_2x^2+ \cdot\cdot +C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n,$$

ಮತ್ತು $(x+1)^n = C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+ .... +C_{n-1}x+C_n.$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಗತ ಬದಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಸಮಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ :

$$(1+x)^n(x+1)^n = (C_0+C_1x+ .... +C_nx^n)(C_0x^n + C_1x^{n-1} + ... +C_0)$$

ಎರಡು ಬದಿಯಲ್ಲಿನ x^n ಇರುವ ಪದದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸೋಣ.

ಈಗ ಎಡಬದಿ $= (1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{n+n} = (1+x)^{2n},$

ಎಂಬುವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ x^n ದ ಗುಣಕ =

$$_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \quad .... \quad [ಏಕೆ?]$$

ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ x^n ದ ಗುಣಕ $= C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ .... \ + C_n^2$

$$\therefore \ C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ .... \ + C_n^2 = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

12.16 ಉದಾ : $C_0 - 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2 - \ .... \ + (-1)^n (n+1) \cdot C_n$ $= 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಎಡಬದಿ $= C_0 - (C_1 + 1 \cdot C_1) + (C_2 + 2 \cdot C_2) - (C_3 + 3 \cdot C_3) + ... + (-1)^n (C_n + n \cdot C_n)$

$$= \{ C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ .... \ + (-1)^n C_n \} - 1 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 - 3 \cdot C_3 + \ .... \ + (-1)^n \ n \cdot C_n$$

$$= \{(1-1)^n\} - \{ C_1 - 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - \ .... \ (-1)^{n-1} \ {}_nC_n \}$$

$$= -\left\{ \frac{n - 2n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \ .... \ + (-1)^{n-1} \cdot n \right\}$$

$$= -n \left\{ 1 - \frac{(n-1)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - \ .... \ + (-1)^{n-1} \right\}$$

$= -n \{ (1-1)^{n-1} \} = 0 =$ ಬಲಬದಿ.

12·17 ಉದಾ : $C_0+2\cdot C_1+3\cdot C_2+ \ldots +(n+1)\cdot C_n =$ $(n+2)2^{n-1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

$$S = C_0+2\cdot C_1+3\cdot C_2+\ldots+(n+1)C_n$$ ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$C_r = C_{n-r}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಬಲಬದಿಯನ್ನು ಹಿಮ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ :

$$S = (n+1)\cdot C_0+n\cdot C_1+(n-1)\cdot C_2+\ldots+C_n$$ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅನುಗತ ಬದಿಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ :

$$2S = (n+2)\cdot C_0 + (n+2)\cdot C_1 + (n+2)\cdot C_2 + \ldots + (n+2)\cdot C_r$$

$$= (n+2)(C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

$$= (n+2)\cdot 2^n$$ [ಏಕೆ ?]

$$S = (n+2)\cdot\frac{2^n}{2} = (n+2)\cdot 2^{n-1}$$

12.18 ಉದಾ : $C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + \ldots + C_{n-r} C_n$

$$= \frac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

(i) $${}_{2n}C_{n+r} = \frac{(2n)!}{(n+r)!\,(2n-n-r)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n+r)!\,(n-r)!}$$ ಮತ್ತು

(ii) $(1+x)^{2n}$ ದಲ್ಲಿ x^{n+r} ಪದದ ಗುಣಕ ${}_{2n}C_{n+r}$ ಎಂಬು ವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಈಗ

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_r\, x^r + C_{n+1}\, x^{r+1} + \dots + C_n\, x^n .$$

$$(x+1)^n = C_0\, x^n + C_1\, x^{n-1} + \dots + C_{n-r}\, x^r + C_n$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಎಡಬದಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ $(1+x)^{2n}$ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನುಗತ ಬದಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ x^{n+r} ಪದದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸೋಣ.

$${}_{2n}C_{n+r} = C_0\, C_r + C_1\, C_{r+1} + \dots + C_{n-r}\, C_n .$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

1. ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗರಿಷ್ಠ ಪದ ಅಥವಾ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(1+x)^{12}$ ಮತ್ತು $x = \frac{5}{4}$.

(ii) $(4+3y)^{25}$ ಮತ್ತು $y=4$.

(iii) $\left(\frac{3x}{4} - \frac{2y}{3}\right)^{19}$ ಮತ್ತು $x=1$, $y=3$.

(iv) $(1-x)^{11}$ ಮತ್ತು $x = \frac{1}{3}$.

ಸೂಚನೆ : $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ ಗಳು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ದ್ವಿಪದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ:

2. $C_1+3C_2+2C_3+\ldots+nC_n = n.2^{n-1}$

3. $C_0+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\ldots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

4. $C_0-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

5. $\frac{C_1}{C_0}+\frac{2C_2}{C_1}+\frac{3C_3}{C_2}+\ldots+\frac{nC_n}{C_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$.

6. $(C_0+C_1)(C_1+C_2)(C_2+C_3)\ldots(C_{n-1}+C_n)$

$$=\frac{(n+1)^n}{n!}C_1C_2C_3\ldots C_n$$

7. $C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+\ldots+C_{n-1}C_n$

$$=\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

8. $(1+C_1+C_2+\ldots+C_n)^2 = 1+{}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2+\ldots+{}_{2n}C_n$

9. $\frac{C_0}{1}+\frac{C_2}{3}+\frac{C_4}{5}+\ldots=\frac{2^n}{n+1}$

10. $\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6}+\ldots=\frac{2^n-1}{n+1}$

11. $C_0+3C_1+5C_2+\dots+(2n+1)C_n = (n+1)2^n$

12. $2C_0+6C_1+10C_2+14C_3+\dots+(4n+2)C_n$
$$= (n+1)2^{n+1}$$

13. $2C_0+5C_1+8C_2+\dots+(3n+2)C_n$
$$= (3n+4)2^{n-1}$$

14. $C_1-2C_2+3C_3-\dots+n(-1)^{n-1}C_n = 0$

15. $C_0C_2+C_1C_3+C_2C_4+\dots C_{n-2}\,C_n$
$$= \frac{(2n)!}{(n+2)!\ n-2)!}$$

16. n ಕ್ರಮಾನುಗತವಾಗಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ
$C_0^2-C_1^2+C_2^2-\dots+(-1)^n\ C^2_n$

$= \dfrac{(-1)^{n/2}\times n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\ \left(\frac{n}{2}\right)!}$ ಅಥವಾ 0 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13

ಮಂಡಲಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

13.1 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :** a_{ij} , $i = 1,2,3, \ldots\ldots, m$ ಮತ್ತು $j = 1,2,3, \ldots\ldots, n$ ಎಂಬ $m \times n$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು m ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು n ನೀಟ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ (13.1.1) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು $m \times n$ ವಿಧದ ಮಂಡಲನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (13.1.1)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) [5] : ಇದು 1×1 ವಿಧದ ಮಂಡಲ; ಇದರಲ್ಲಿ 1 ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು 1 ನೀಟ ಸಾಲು ಇವೆ.

(ii) $[2\ 3\ 4]$: ಇದು 1×3 ವಿಧದ ಮಂಡಲ; ಇದರಲ್ಲಿ 1 ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು 3 ನೀಟಸಾಲುಗಳು ಇವೆ.

(iii) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$: ಇದು 2×1 ವಿಧದ ಮಂಡಲ; ಇದರಲ್ಲಿ 2 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು 1 ನೀಟಸಾಲು ಇವೆ.

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$: ಇದು 3×3 ವಿಧದ ಮಂಡಲ; ಇದರಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲು [illegible] ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ನೀಟಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಈ ಮಂಡಲವನ್ನು 3ನೇ ವಿಧದ ಅಥವಾ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕ ಮಂಡಲವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ n ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು n ನೀಟಸಾಲು ಇರುವ ಮಂಡಲವನ್ನು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕ ಮಂಡಲವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಟೀಕೆ : $m = n$ ಆದಾಗ (13.1.1) ರಲ್ಲಿರುವ **ಮಂಡಲವು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.**

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 5 & 6 & \end{bmatrix}$:

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದೂ ಮಂಡಲದ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

13.2 **ಟೀಕೆಗಳು :** (i) (13.1.1)ರಲ್ಲಿರುವ ಮಂಡಲವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ a_{11}; a_{12}, a_{13},...., a_{ij} ...., a_{mn} ಎಂಬ $m \times n$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಮಂಡಲದ **ಮೂಲಾಂಶ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆ (ii) ರಲ್ಲಿ ಮಂಡಲದ ಮೂಲಾಂಶಗಳು 2, 3, ಮತ್ತು 4 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(ii) (13.1.1) ರಲ್ಲಿರುವ ಮಂಡಲದ i ನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು j ನೆಯ ನೀಟಸಾಲು, ಇವೆರಡರಲ್ಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬರುವ a_{ij} ಎಂಬ ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು ಬರೆಯಲು a ಅಕ್ಷರದ ಬುಡಕ್ಕೆ i ಮತ್ತು j ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹಚ್ಚಿದ್ದೇವೆ. **ಹೀಗೆ ಹಚ್ಚಿರುವ i, j ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು aದ ಉಪಲಿಪಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮೂಲಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಥಮ ಮತ್ತು ದ್ವಿತೀಯ ಉಪಲಿಪಿಗಳು, ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ, ದತ್ತ ಮೂಲಾಂಶದ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು** ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

ಈಗ a_{23} ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ: (i) ಪ್ರಥಮ ಉಪಲಿಪಿ 2; ಅಂದರೆ a_{23} 2ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆಯೆಂದಾಯ್ತು. (ii) ದ್ವಿತೀಯ ಉಪಲಿಪಿ 3; ಅಂದರೆ a_{23} 3ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆಯೆಂದಾಯ್ತು. ಈ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆನೋಡಬಹುದು.

(iii) ಇನ್ನುಮುಂದೆ ಮಂಡಲದ iನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು jನೆಯ ನೀಟಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು (i,j) ನೆಯ ಮೂಲಾಂಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ (iv) ರಲ್ಲಿರುವ 3×3 ಚೌಕಮಂಡಲದಲ್ಲಿ :

(2, 3) ನೆಯ ಮೂಲಾಂಶ = 4,

(1, 3) ,, = 3,

ಮತ್ತು (3, 2) ,, = 4,

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(iv) ಇನ್ನುಮುಂದೆ ಮಂಡಲಗಳನ್ನು A, B, C ಎಂಬ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಹಗಾಮಿ ಸಣ್ಣ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ (13.1.1) ರಲ್ಲಿರುವ ಮಂಡಲವನ್ನು A ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ ಈ ಮಂಡಲವನ್ನು,

$$A = [\ a_{ij}\ ]_{m \times n}$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ :

$$[\ a_{ij}\ ]_{1 \times 1} = [a_{11}]$$

$$[\ a_{ij}\ ]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \end{bmatrix}$$

13.3 ಉದಾ : (i) $a_{ij} = i \times j$ ಆದಾಗ $[\ a_{ij}\ ]_{2 \times 3}$ ಮಂಡಲವನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

ಈಗ $a_{11} = 1 + 1 = 2$, $a_{12} = 1 + 2 = 3$, ಇತ್ಯಾದಿ.

$$\therefore [\ a_{ij}\ ]_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(ii) $a_{ij} = + \sqrt{i+j}$ ಎಂದಿರಲಿ. $[\ a_{ij}\ ]_{3 \times 4}$ ಮಂಡಲವನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

ಈಗ $a_{11} = \sqrt{1+1} = 2$, $a_{12} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, ...

$$\therefore [\ a_{ij}\ ]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{3} & 2 & \sqrt{5} & \sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

13.4 **ಟೀಕೆ :** (13.1.1)ರಲ್ಲಿರುವ ಮಂಡಲವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುವ ಪದ್ಧತಿಯೂ ರೂಢಿಯಲ್ಲಿದೆ.

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \text{ ಅಥವಾ } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ಆದರೆ, ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ (13.1.1)ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

ಸೂಚನೆ : ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಮಂಡಲಗಳು ಹೌದೇ ಅಲ್ಲವೇ ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(1 ರಿಂದ 10 ಲೆಕ್ಕಗಳು)

1. $[2]$. 2. $[2 \quad 3 \quad 4]$. 3. $\begin{bmatrix} x & y & z \\ -x & o & 2y \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 6 & 7 & \\ & & 9 & \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

11. $a_{ij} = ij$ ಆದಾಗ $[a_{ij}]_{2 \times 3}$ ಮಂಡಲವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

12. $b_{ij} = i+j - i \times j$ ಆದಾಗ $[b_{ij}]_{2 \times 2}$ ಮಂಡಲವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

13. $S_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i=j \end{cases}$ **ಆದಾಗ** $[S_{ij}]_{3 \times 3}$ **ಮಂಡಲವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.**

14. $k_{ij} = 0$ ಆದಾಗ, $[k_{ij}]_{3 \times 3}$ ಮಂಡಲವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

13.5 **ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿ ಸಮತ್ವ :** $[a_{ij}]_{m \times n}$ ಮತ್ತು $[b_{ij}]_{m \times n}$ **ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿ,** i, j**ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ**

$$a_{ij} = b_{ij}$$

ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ

$$[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n}$$

ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಹೀಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ

$$[a_{ij}]_{m \times n} \neq [b_{ij}]_{m \times n}$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) $$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 2 \\ 3^2 & 4^2 \end{bmatrix}$$

(ii) $[2x \quad 3y] = [6 \quad 9]$, **ಆ. ಆ. ಮಾತ್ರ.**
$x = 3$ **ಮತ್ತು** $y = 3$.

$$\text{(iii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ಏಕೆಂದರೆ,

(3, 3) ನೆಯ ಮೂಲಾಂಶಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿಲ್ಲ.

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = [1 \quad 2]$ ಆದರೆ, $A = B$

ಅಥವಾ $A \times B$ ಎಂಬುವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದೂ ಸಮಂಜಸವಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ, A ಮತ್ತು B ಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳ ಮಂಡಲಗಳಾಗಿವೆ.

13.5 ಟೀಕೆ : A, B ಗಳು ಒಂದೇ ವಿಧದ ಮಂಡಲವಾದಾಗ $A = B$ ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ A ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವೂ B ದ ಸಹಗಾಮಿ ಮೂಲಾಂಶಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

13.7 ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ : $[a_{ij}]_{m \times n}$ ಮತ್ತು $[b_{ij}]_{m \times n}$ ಎಂಬ ಮಂಡಲಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು

$$[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) $[2] + [3] = [2+3] = [5]$

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3+1 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & -8 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮಂಡಲದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವೂ ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ, ದತ್ತ ಮಂಡಲವನ್ನು **ಶೂನ್ಯಮಂಡಲ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮಂಡಲವು 2×3 ವಿಧದ ಶೂನ್ಯಮಂಡಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(iv) ಅನುಕೂಲದ ಸಲುವಾಗಿ, ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $[a_{ij}]_{m \times n}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದರ ಬದಲು $[a_{ij}]$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

$$[a_{ij}] + [a_{ij}] = [a_{ij} + a_{ij}]$$

$$\Rightarrow 2 \times [a_{ij}] = [2a_{ij}]$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಬದಿಗೂ $[a_{ij}]$ ಕೂಡೋಣ.

ಇದರಿಂದ : $[a_{ij}] + 2 \times [a_{ij}] = [a_{ij}] + [2a_{ij}]$

$$\Rightarrow 3 \times [a_{ij}] = [a_{ij} + 2a_{ij}]$$

$$= [3a_{ij}]$$

ಇದೇರೀತಿ, : $[a_{ij}] + 3 \times [a_{ij}] = [a_{ij}] + [3a_{ij}]$

$$\Rightarrow 4 \times [a_{ij}] = [4a_{ij}]$$

ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.

13.8 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $[a_{ij}]_{m \times n}$ ಮಂಡಲದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು k ಎಂಬ * ಅದಿಶದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಮಂಡಲವನ್ನು kA ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ,**

---

* ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅದಿಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. 2, $3+j4$ ಇವುಗಳು ಅದಿಶಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

$$\mathbf{k}\,A = [\, ka_{ij} \,]_{m \times n}$$

ಉದಾ :
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 16 & -10 \\ 15 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times 8 & \frac{1}{2}\times 12 \\ \frac{1}{2}\times 16 & \frac{1}{2}\times -10 \\ \frac{1}{2}\times 15 & \frac{1}{2}\times 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -5 \\ 7.5 & 5.5 \end{bmatrix}$$

13.9 **ಟೀಕೆಗಳು :** (i) ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, A ಎಂಬುದು **ಯಾವುದೆ** ಒಂದು ಮಂಡಲವಾದರೆ, —A ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ

$$-A = -1 \times A$$

ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$[\, a_{ij} \,]_{m \times n} - [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$$ **ಎಂಬುದಕ್ಕೆ,**

$$[\, a_{ij} \,]_{m \times n} + (-1) \times [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$$

$$= [\, a_{ij} \,]_{m \times n} + [\, -b_{ij} \,]_{m \times n}$$

$$= [\, a_{ij} - b_{ij} \,]_{m \times n} \ldots$$ [ಏಕೆ ?]

ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4-2 & 2-4 \\ 3-1 & 1-3 \\ 4-0 & 0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ 2-2 \\ 4-4 \end{bmatrix}$$

(ii) ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವಾಗ, ಒಂದೇ ವಿಧದ ಮಂಡಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಮಂಡಲಗಳೆರಡರ ವಿಧಗಳು ಒಂದೇ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ, ಆ ಮಂಡಲಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಕಲನವು ಮಾನ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ; ಹೀಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ ಸಂಕಲನವು ಅಮಾನ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ಎಂಬ ಮಂಡಲಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಕಲನವು ಅಮಾನ್ಯ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನವು ಮಾನ್ಯವೇ ? ಅಮಾನ್ಯವೇ ? ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ, ದತ್ತ ಮಂಡಲಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $[2]$, $[3]$. (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $[1\ 2\ 3]$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

2. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 16 & -12 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} x & 2y & z \\ p & -q & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ,

x, y, z, p, q, r ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(i) O ವು 3×3 ವಿಧದ ಶೂನ್ಯಮಂಡಲವೆಂದು ತಿಳಿದು

$$A+O = O+A = A$$

ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ. ಇದು ಮಂಡಲಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ "**ಸಂಕಲನದ ಏಕ**"ದ ಇರುವಿಕೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) A+B, B+A ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ತನ್ಮೂಲಕ,

$$A+B = B+A$$

ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ. ಇದು ಮಂಡಲಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ **ಸಂಕಲನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯ** ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ A+Bವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೀರಿ; ಈಗ B+C ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು

$$(A+B) + C = A + (B+C)$$

ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ. ಇದು ಮಂಡಲಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ **ಸಂಕಲನವು ಸಹವರ್ತನೀಯ** ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(iv) $B+D=C$ ಇರುವಂತೆ, D ಎಂಬ ಮಂಡಲವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಹೀಗೆ ಬರೆದ $D=C-B=-(B-C)$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

5. $$3\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 6 \\ -1 & 2s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & p+q \\ r+s & 3 \end{bmatrix}$$ ಆದರೆ,

$p+s = q+r-5$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

13.10 ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರ ;

ಸಂದರ್ಭ 1 :

$A=[a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1m}]$ ಮತ್ತು $B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ ಎಂಬ

ಮಂಡಲಗಳ, ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು

$$A\times B=[a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1m}b_{m1}]$$

$$=[\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\, b_{j1}]$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. $A\times B$ ಎಂಬುದನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ AB ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) $$[1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix} = [1\times(2)+2(3)+(-4)(= [-4]$$

(ii) $$[0\ \ 0]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = [0\times x+0\times y]=[0].$$

(iii) $$[x\ \ y]\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = [x\times 0+y\times 0]=[0].$$

(iv) $$[a_{i_1}\ a_{i_2} \ldots a_{in}]\begin{bmatrix}b_{1k}\\b_{2k}\\\ldots\\b_{nk}\end{bmatrix}$$

$$=[a_{i1}\ b_{1k} = a_{i2}\ b_{2k} + \ldots + a_{in}\ b_{nk}]$$

$$= [\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk} \qquad \ldots\ldots \qquad (13.10.1)$$

ಸಂದರ್ಭ 2 : ಈಗ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ಮತ್ತು $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ಎಂದಿರಲಿ. A ಮತ್ತು B ಗಳ ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು

$$A \times B = C = [C_{ik}]_{m \times p}$$

ಇಲ್ಲಿ $[C_{ik}] =$ [A ದ i ನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು] $\times$ [B ದ k ನೆಯ ನೀಟಸಾಲು]

$$= [a_{1i}\ a_{i2} \ldots a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \ldots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = [\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{ik}]$$

[(13.10.1) ರಿಂದ]

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರಾತ್ಮಕವಾಗಿ,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{m} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & \cdots & C_{1p} \\ \vdots & & & \\ C_{1i} & \boxed{C_{ik}} & \cdots & C_{ip} \\ \vdots & & & \\ C_{m1} & \cdots & \cdots & C_{mp} \end{bmatrix}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ಎಂದಿರಲ್ಲಿ.

A ವು 2×3 ವಿಧದ ಮಂಡಲ; B ವು 3×2 ವಿಧದ ಮಂಡಲ. ಆದ್ದ ರಿಂದ $A \times B$ ಯನ್ನು ಮೇಲಿನಂತೆ ಪಡೆದರೆ, ಅದು 2×2 ವಿಧದ ಮಂಡಲವಾಗು ತ್ತದೆ.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

ಇಲ್ಲಿ $[C_{ij}]$ = [A ದ i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು] [B ದ j ನೇ ನೀಟಸಾಲು].

$$\therefore\ [C_{11}] = [0\quad 3\quad 5]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$=[0\times1+3\times2+5\times3]=[21].$$

$$[C_{12}]=[0\ 3\ 5]\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}=[0\times2+3\times3+5\times4]=[29]$$

$$[C_{21}]=[3\ 5\ 7]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=[3\times1+5\times2+7\times3]=[34]$$

$$(C_{22})=[3\ 5\ 7]\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}[6+15+28]=[49].$$

$$\therefore\quad AB=\begin{bmatrix}21 & 29\\34 & 49\end{bmatrix}$$

(ii) A, B ಗಳು ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವಂತಿರಲಿ. $A \times B$ ಮಂಡಲವನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. BA ಒಂದು 3×3 ವಿಧದ ಮಂಡಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [1\,(0)+2\,(3)] & [1\,(3)+2\,(5)] & [1\,(5)+2\,(7)] \\ [2\,(0)+3\,(3)] & [2\,(3)+3\,(5)] & [2\,(5)+3\,(7)] \\ [3\,(0)+4\,(3)] & [3\,(3)+4\,(5)] & [3\,(5)+4\,(7)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 13 & 19 \\ 9 & 21 & 31 \\ 12 & 29 & 43 \end{bmatrix}.$$

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : $AB \neq BA$ ಅಂದರೆ **ಮಂಡಲಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ**

(iii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13.11 ಟೀಕೆ: ಮಂಡಲಗಳ ಗುಣದಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವಾಗ A ಮಂಡಲದ ನೀಟಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = B ಮಂಡಲದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವಂತೆ ಆರಿಸಿಕೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ [13.10 ನೋಡಿರಿ.] ಆದ್ದರಿಂದ Aದ ನೀಟಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = Bದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ABಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗಿರುವಾಗ A, Bಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾನ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ; ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, A,Bಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು ಅಮಾನ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

AB ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ A ವನ್ನು **ಹಿಂಗುಣಕವೆಂದೂ** ಮತ್ತು Bವನ್ನು **ಮುಂಗುಣಕವೆಂದೂ** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ B ಹಿಂಗುಣಕವಾದಾಗ, B ಮತ್ತು A ಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರವು ಅಮಾನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.; ಏಕೆಂದರೆ, Bದ ನೀಟಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ≠ Aದ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ. AB ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯಲು B ವನ್ನು Aದಿಂದ ಹಿಂಗುಣಿಸಬೇಕು ಅಥವಾ Aವನ್ನು Bದಿಂದ ಮುಂಗುಣಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

31.12 ಉದಾ: (i) $=Y\ [34\quad 1\quad 5],\ X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$XY = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [3\quad 4\quad 1\quad 5] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$YX = [3\ \ 4\ \ 1\ \ 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [3+8+0+5] = [16].$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-1)+1(6)-1(5) & 1(-2)+1(12)-1(10) & 1(-1)+1(6)-1(5) \\ 2(-1)-3(6)+4(5) & 2(-2)-3(12)+4(10) & 2(-1)-3(6)+4(5) \\ 3(-1)-2(6)+3(5) & 3(-2)-2(12)+3(10) & 3(-1)-2(6)+3(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -10 \\ 48 & -42 & 60 \\ 40 & -35 & 50 \end{bmatrix}$$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : **A** ಮತ್ತು **B** ಗಳು ಶೂನ್ಯಮಂಡಲಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಸಂಧರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಸಹ **AB** ಒಂದು ಶೂನ್ಯಮಂಡಲವಾಗಬಹುದು. ಅರ್ಥಾತ್, $A \neq O$ $B \neq O$ ಆದಾಗ $AB = O$ ಅಗಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ **O** ಒಂದು ಶೂನ್ಯಮಂಡಲವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. [2. ೫ ಪ್ರಮೇಯದೊಂದಿಗೆ, ಇದನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ].

(iii) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} = AC$$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಬಹುದು.

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ: $B \neq C$ ಆದಾಗ್ಯೂ ಸಹ $AB = AC$. [2·17—(6)ರೊಂದಿಗೆ ಇದನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ].

13.13 ವಾಖ್ಯೆ : I_n ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ $n \times n$ ವಿಧದ ಏಕಮಾನ ಮಂಡಲವನ್ನು,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \cdots\cdots \quad (13.13.1)$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈಗ $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \ldots \quad (13.13.2)$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ $I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ [ಅ.13.1.13 ನೋಡಿರಿ]

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ, (13.13.2) ರಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿರುವ δ_{ij} ಯನ್ನು 'ಕ್ರೋನೇಕರ್ ಡೆಲ್ಟ' ಎಂದು ಕರೆಯುವುದು ರೂಢಿಯಲ್ಲಿದೆ. **A** ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು **n** ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲವಾದರೆ,

$$I_n A = AI_n = A.$$

ಏಕೆಂದರೆ,

$$I_n A = [\delta_{ij}]_{n \times n} \times [a_{ij}]_{n \times n} = [C_{ij}]_{n \times n}$$

ಆದರೆ, $$[C_{ij}] = \delta_{i1} \quad \delta_{i2} \ldots \delta_{ij} \ldots \delta_{in} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

$$= [\delta_{i1} a_{1j} + \delta_{i2} a_{2j} + \ldots + \delta_{ii} a_{ij} + \ldots + \delta_{in} a_{nj}]$$

$$= [0+0+\ldots+1 \cdot a_{ij} + \ldots + 0]$$

$$= [a_{ij}].$$

ಇದೇ ರೀತಿ $AI_n = A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. $A_{m,n}$ ಒಂದು $m \times n$ ವಿಧದ ಮಂಡಲವೆಂದು ತಿಳಿದು, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಮಾನ್ಯವೇ ? ಅಮಾನ್ಯವೇ ? ನಿರ್ಧರಿಸಿ. ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ, ಗುಣಲಬ್ಧದ ವಿಧವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ :

(i) $A_{5,4} \times B_{4,5}$ (ii) $A_{4,2} \times B_{8,4}$

(iii) $A_{2,3} \times B_{3,7}$ (iv) $A_{r,k} \times B_{k,s}$

(v) $A_{7,11} \times B_{11,12}$ (vi) $A_{p,p} \times B_{p,p}$

(vii) $A_{l,m} \times B_{m,l}$ (viii) $A_{ml} \times B_{l,m}$

2. (i) $P = [\frac{1}{2}]$, $Q = [2 \quad 1 \quad 0]$ ಆದರೆ, $PQ = ?$ $QP = ?$

(ii) $P = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $Q = [2]$ ಆದರೆ $PQ = ?$ $QP = ?$

(iii) $A = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, $AB = ?$

$BA = ?$

(iv) $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$, ಆದರೆ $PQ=QA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(v) $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ $AB=BA$
$= 23I_2$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(vi) $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{18}$

ಆದರೆ, $PQ = ?\quad QP = ?$

3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ಆದರೆ,

(i) $A(B+C) = AB+AC$

(ii) $(A+B)C = AC+BC$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ. ಇದು ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ,

ಮಂಡಲಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ **ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವು** ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.

4. $$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$ ಮತ್ತು

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ಆದರೆ (PQ) R = P (QR) ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ. ಇದು ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ, ಮಂಡಲಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ **ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವು** ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.

5. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ ಆದರೆ,

$$QP = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

ಎಂದೂ ಮತ್ತು $PQ = O$ ಎಂದೂ **ತೋರಿಸಿರಿ.**

6. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ಅಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$AB = BA$ ಆದರೆ $a = d$ ಮತ್ತು $b + c = o$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. A ಮತ್ತು B ಗಳು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು,

(i) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ಮತ್ತು (ii) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಏಕೆ ಯುಕ್ತವಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಯಾವ ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ ?

8. x, y, z, w ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & w \\ -w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ -w & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

9. x ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ

$$[x \quad 4 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O?$$

10. A, B ಗಳು n ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲಗಳೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಈಗ

$$C_1 = \propto_1 A + B_1 B,$$
$$C_2 = \propto_2 A + B_2 B$$

ಎಂದಿರಲಿ. $\propto_1$, $\propto_2 B_1$, B_2ಗಳು ಅದಿಶಗಳು ಮತ್ತು $\propto_1 B_2 \neq \propto_2 B_1$. $AB = BA$ ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $C_1C_2 = C_2C_1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11. ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ $(A+B)^3$ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ,

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, A^2, A^3 ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$f(x) = X^3 - 3X^2 - 2X + 4I_2,\ g(x) = X^2 - X - 8I_2$$

ಆದರೆ, $f(A) = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & -17 \end{bmatrix}$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $g(A) = O$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ.

13. A, B ಮತ್ತು C ಗಳು 13.12 ಉದಾ : (iii) ರಂತಿರಲಿ. $B \neq C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದಾಗ್ಯೂ $AB = AC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

14. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

ಮತ್ತು $A^3 = O$.

(ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, $B^3 - 2B^2 - 9B = O$.

(iii) $C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, $C^2 = O$.

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13: 14 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :** ಯಾವುದೇ ಒಂದು $m \times n$ ಮಂಡಲದ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಸಹಗಾಮಿಯಾ ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ $n \times m$ ಮಂಡಲವನ್ನು ದತ್ತ ಮಂಡಲದ ಪಲ್ಲಟವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. Aದ ಪಲ್ಲಟವನ್ನು A^{1} ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$A = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ ಆದರೆ,

$A^1 = [\, a^1_{ij} \,]_{n \times m}$, ಇಲ್ಲಿ $a_{ij} = a^1_{ji}$,

$i = 1, 2, \ldots, m$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, \ldots, n$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$; $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

Aವು $m \times n$ ಮಂಡಲವಾದಾಗ, A^1ವು $n \times m$ ಮಂಡಲವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

13.15 ಪ್ರಮೇಯ : (i) $(A^1) = A$.

(ii) ಸಂಕಲನವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ, $(A + B)^1 = A^1 + B^1$.

(iii) ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ, $(AB)^1 = B^1 A^1$.

(iv) $(kA)^1 = kA^1$ (k [illegible]

ಸಾಧನೆ : (i) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$A = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore \; A^1 = [a^1_{ij}]_{n \times m}$, ಇಲ್ಲಿ $a^1_{ij} = a_{ji}$ .... (*)

$\therefore \; (A^1) = [(a^1)^1_{ij}]_{m \times n}$, ಇಲ್ಲಿ $(a^1)^1_{ij} = a^1_{ij}$

$$= [a_{ij}]_{m \times n} = A \left\{ \begin{array}{l} = a_{ij} \\ [(*) \text{ ದಿಂದ}] \end{array} \right.$$

(ii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$ ಎಂದಿರಲಿ,

$\therefore \; A^1 = [\, a^1_{ij} \,]_{n \times m}$; $B^1 = [b^1_{ij}]_{n \times m}$

$A + B = C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ಎಂದಿರಲಿ

ಇಲ್ಲಿ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .... (*)

ಈಗ $(A + B)^1 = C^1 = [c^1_{ij}]_{n \times m}$,

ಇಲ್ಲಿ $c^1_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$ [(*) ದಿಂದ]

$= a^1_{ij} + b^1_{ij}$ [ಏಕೆ ?]

$\therefore \; (A + B)^1 = [a^1_{ij} + b^1_{ij}]_{n \times m}$

$= [a^1_{ij}]_{n \times m} + [b^1_{ij}]_{n \times m}$

$= A^1 + B^1.$

(iii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$A=[a_{ij}]_{m \times n}$; $B=[b_{jk}]_{n \times p}$

$AB=C=[c_{ik}]_{m \times p}$ ಎಂದಿರಲಿ

ಈಗ $(AB)^1=C^1=[c^1_{ik}]_{p \times m}$ ·

ಇಲ್ಲಿ $C^1_{ik} = C_{ki}$ = [Aದ kನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು] [Bದ iನೆಯ ನೀಟಸಾಲು]

$$= [a_{k1}\ a_{k2} \ldots a_{kn}] \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$$

$$= [\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{ij}]$$

$$= [\sum_{j=1}^{n} b^1_{ij}\, a^1_{jk}] \quad \ldots \quad \text{[ಏಕೆ?]}$$

= [B^1ದ iನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು] [A^1ದ kನೆಯ ನೀಟಸಾಲು]

= [$B^1 A^1$ದ (i,k)ನೆಯ ಮೂಲಾಂಶ]

C^1_{ik} = $(AB)^1$ದ (i,k)ನೆಯ ಮೂಲಾಂಶ

= B^1A^1ದ (i,k)ನೆಯ ಮೂಲಾಂಶ.

$\therefore \quad (AB)^{1} = B^{1}A^{1}$

ಅನುಮಿತ : ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ,

$$\left.\begin{aligned} (ABC)^{1} &= C^{1}B^{1}A^{1} \\ (ABCD)^{1} &= D^{1}C^{1}B^{1}A^{1} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (13.14.1)$$

ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಓದುಗನಿಗೇ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{1}A^{1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (AB)^{1}$$

13.16 ಸಮಾಂಗ ಮತ್ತು ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲಗಳು :

ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲ : n ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲ

$$A = A^1$$

ಆದಾಗ A ಮಂಡಲವನ್ನು ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$: ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲ.

$$A = A^1 \Leftrightarrow a_{ij} = a^1_{ji}$$

$$= a_{ij} \cdot$$

ಇದರಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುವ ವಿಷಯ : i, j ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $a_{ji} = a_{ji}$ ಆ. ಆ. ಮಾತ್ರ A ಯು ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲ : n ನೇ ಪ್ರಮಾಣದಚೌಕಮಂಡಲ;

$$A = -A^1$$

ಆದಾಗ, A ಮಂಡಲವನ್ನು ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$A = -A^1 \Leftrightarrow a_{ij} = -a^1_{ij}$$

$$= -a_{ji}$$

$j = i$ ಆದಾಗ, $a_{ii} = -a_{ii}$

$$\Rightarrow a_{ij} + a_{ji} = O$$

$$\Rightarrow 2a_{ii} = O$$

$$\Rightarrow a_{ii} = O$$

$\Rightarrow$ ಕರ್ಣ ಮೂಲಾಂಶ $= O$

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ :

(i) i, jಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $a_{ij} = -a_{ij}$ ಆ. ಆ. ಮಾತ್ರ Aವು ಒಂದು ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲವಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರ್ಣ ಮೂಲಾಂಶವೂ ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅರ್ಥಾತ್, ಒಂದು ಮಂಡಲದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕರ್ಣ ಮೂಲಾಂಶವು ಶೂನ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದಾಗ, ದತ್ತ ಮಂಡಲವು ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲವಾಗುವುದು ಅಶಕ್ಯ.

ಉದಾ : $\begin{bmatrix} 0 & i & -2 & 3 \\ -i & 0 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 4i \\ -3 & 5 & -4i & 0 \end{bmatrix}$: ಇದು ಒಂದು ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲ.

13.17 **ಉದಾ :** A ಒಂದು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕ ಮಂಡಲವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$X = A + A^1$ ಮತ್ತು $Y = A - A^1$

$\Rightarrow X^1 = (A + A)^1 \quad \Rightarrow \quad Y^1 = (A - A^1)^1$

$$= A^1 + (A^1)^1 \quad [\text{ಏಕೆ ?}] \qquad = A^1 - (A^1)^1$$

$$= A^1 + A \quad [\text{ಏಕೆ ?}] \qquad = A^1 - A$$

$$= A + A^1 \qquad = -(A - A^1)$$

$$= X \qquad = - Y$$

ಇದರಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುವ ವಿಷಯ : X, Yಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂಗ ಮತ್ತು ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲಗಳಾಗಿವೆ. ಅರ್ಥಾತ್,

A ಒಂದು ಚೌಕಮಂಡಲವಾದಾಗ, $A + A^1$ ಮತ್ತು $A - A^1$ ಮಂಡಲಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂಗ ಮತ್ತು ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

13.18 **ಟೀಕೆ :** Aಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಚೌಕಮಂಡಲವಾದರೆ,

$$A = B + C$$

ಇರುವಂತೆ, B ಎಂಬ ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವು ಮತ್ತು C ಎಂಬ ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲವು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದು,

$$B = \frac{A + A^1}{2}, \quad C = \frac{A - A^1}{2}$$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

13.19 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : A ಒಂದು $m \times n$ ವಿಧದ ಮಂಡಲವಾದಾಗ, $\bar{A}$ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ A ಮಂಡಲದ ಅನುವರ್ತವನ್ನು**

$$\bar{A} = [\ \bar{a}_{ij}\ ]$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $\bar{a}_{ij}$ ಮೂಲಾಂಶವು Aಮಂಡಲದ(i, j)ನೆಯ ಮೂಲಾಂಶ a_{ji} ದ ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾ : $\begin{bmatrix} 2+i & 1-i \\ 7+i11 & 5+i4 \\ -i8 & 11 \end{bmatrix}$; $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 7-i11 & 5-i4 \\ i8 & 11 \end{bmatrix}$

13.20 ಪ್ರಮೇಯ : A ಒಂದು ಚೌಕಮಂಡಲವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

(i) $\overline{(\bar{A})} = A$ ಇನ್ನು ಮುಂದೆ $(\bar{A})$ ಎಂಬುದನ್ನು $\bar{A}$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ.

(ii) ಸಂಕಲನವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ. $\overline{A+B} = \bar{A}+\bar{B}$.

(iii) ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ $\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$.

(iv) $\overline{kA} = \bar{k}\,\bar{A}$, ಇಲ್ಲಿ k = ಅದಿಶ.

(v) $(\bar{A}^1) = (\bar{A})^1$. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಇದನ್ನು $\bar{A}^1$ ಅಥವಾ $\bar{A}^1$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : (i) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ಆದರೆ, $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{m \times n}$

ಈಗ $\overline{(\bar{A})} = [\overline{(\bar{a}_{ij})}]_{m \times n}$

$= (\bar{\bar{a}}_{ij})_{m \times n}$

$= [a_{ij}]_{m \times n}$ ....[2.51—(i)ರಿಂದ

$= A$

(ii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈಗ $\overline{A+B} = [\overline{a_{ij}+b_{ij}}]_{m\times n}$

$=[\bar{a}_{ij}+\bar{b}_{ij}]_{m\times n}$ [ಅ–2.4.8 ರಿಂದ]

$=[\bar{a}_{ij}]_{m\times n}+[\bar{b}_{ij}]_{m\times n}$

$=\bar{A}+\bar{B}$

(iii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು $B=[b_{ik}]_{n\times p}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \quad AB=\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\right]_{m\times p}$$

$$\therefore \quad \overline{AB}=\left[\overline{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\right)}\right]_{m\times p}$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}\, b_{jk}}\right]_{m\times p}$$ [ಅ-2.4.8 ರಿಂದ]

$$=\left[\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\, \bar{b}_{jk}\right]_{m\times p}$$ [— ,, —]

$=\bar{A}\,\bar{B}$ .... [ಏಕೆ ?]

(iv) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ : $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad kA = [\, ka_{ij} \,]_{m \times n}$

$\therefore \quad \overline{kA} = [\, \overline{ka_{ij}} \,]_{m \times n}$

$= [\, \bar{k}\, \bar{a}_{ij} \,]_{m \times n}$

$= \bar{k}\, [\, \bar{a}_{ij} \,]_{m \times n}$

$= \bar{k}\, \bar{A}.$

(v) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ : $A = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad \bar{A} = [\, \bar{a}_{ij} \,]_{m \times n}$

$\therefore (\bar{A})' = [\, \bar{a}'_{ji} \,]_{n \times m}\,;\ \bar{a}'_{ij} = \bar{a}_{ji}$

ಈಗ $\quad A' = [\, a'_{ij} \,]_{n \times m}\,;\ a'_{ij} = a_{ji}$

$\therefore \overline{(A')} = [\, \bar{a}'_{ij} \,]_{n \times m}\,; \bar{a}'_{ij} = \bar{a}_{ji}$

$\therefore \bar{a}'_{ij} = \bar{a}_{ji} = \bar{a}'_{ij}$

$\therefore \quad (\bar{A})' = \overline{(A')}\,.$

13.21 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : A ಒಂದು ಚೌಕಮಂಡಲವಾದಾಗ, $\overset{*}{A}$ ಸಂಕೇತ ದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ A ಮಂಡಲದ ಪಲ್ಲವರ್ತವನ್ನು

$$A^{*} = \overline{(A')}$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, A ದ ಪಲ್ಲಟದ ಅನುವರ್ತವನ್ನು A ಮಂಡಲದ ಪಲ್ಲವರ್ತವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ i & 1-i3 \end{bmatrix}$; $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ -i & 1+i3 \end{bmatrix}$.

$$\therefore \; A^{*} = \bar{A}' = \bar{A}^{t} = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2-i & 1+i3 \end{bmatrix}.$$

13.22 ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲಗಳು :

ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲ : n ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕ ಮಂಡಲ

$$A = A^{*}$$

ಆದಾಗ, A ಮಂಡಲವನ್ನು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$A = [\, a_{ij} \,]_{n \times n}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈಗ $A^{*} = (\bar{A})' = [\bar{a}_{ij} \,]_{n \times n}$: $\bar{a}'_{ij} = \bar{a}_{ji}$

$A = A^{*} \Leftrightarrow a_{ij} = \bar{a}_{ji}$

$i = j$ ಆದಾಗ, $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$

$\Rightarrow a_{ij}$ = ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ [ಅ-2.4.8 –(iv) ರಿಂದ]

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : i, j ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ಆ.ಆ. ಮಾತ್ರ Aಯು ಒಂದು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವಾಗುತ್ತದೆ; ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರ್ಣಮೂಲಾಂಶವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾ:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3+i & -11-i8 \\ 3-i & 0 & 5+i6 \\ -11+i8 & 5-i6 & 12 \end{bmatrix};$$

ಇದು ಒಂದು ಹರ್ಮಿಟಿಯನ್ ಮಂಡಲ.

ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲ : n ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲ

$$A = -A^*$$

ಆದಾಗ, A ಮಂಡಲವನ್ನು ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$A = -A^* \iff a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$$

$j = i$ ಆದಾಗ $a_{ii} = -\overline{a_{ii}}$

$\Rightarrow \quad a_{ii} + \overline{a_{ii}} = 0$

$\Rightarrow \quad a_{ij}$ ಒಂದು ಊಹ್ಯಾ ಸಂಖ್ಯೆ.

[ಅ-2.4.8-(v) ರಿಂದ]

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : i,j ಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ **ಆ.ಆ. ಮಾತ್ರ Aಯು ಒಂದು ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವಾಗುತ್ತದೆ ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರ್ಣಮೂಲಾಂಶವೂ ಊಹ್ಯಾ ಸಂಖ್ಯೆ.**

ಉದಾ :
$$\begin{bmatrix} i & 2+i3 & -4-i11 \\ -2+i3 & 0 & 7+i8 \\ -4+i11 & -7+i8 & i11 \end{bmatrix}$$
: ಇದು ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲ.

13.23 ಪ್ರಮೇಯ : (i) $(A^*)^* = A$.

(ii) $(AB)^* = B^* A^*$.

ಸಾಧನೆ : (i) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$$A^* = (\bar{A})'$$

$$\therefore \quad (A^*)' = \{(\bar{A})'\}'$$

$$= \quad \bar{A} \quad \ldots \qquad [\text{ಏಕೆ ?}]$$

$$\therefore \quad \overline{(A^*)} = (\bar{A})'$$

$$\Rightarrow \quad (A^*)^* = A$$

(ii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$$\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$$

$$(\overline{AB})' = (\bar{A}\,\bar{B})'$$

$$= (\bar{B})' \quad (\bar{A})' \qquad [\text{ಏಕೆ ?}]$$

$$= B^* A^*$$

$$\therefore \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

ಅನುಮಿತ : $(ABCD\ldots)^* = \ldots D^* C^* B^* A^* \ldots$ (13.21.1)
ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಓದುಗನಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

13.24 ಉದಾ : H ಒಂದು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವಾದಾಗ, $A^* HA$ ಕೂಡ ಒಂದು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವಾಗುತ್ತದೆ.

$P = A^* HA$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಈಗ $P^* = (A^* H A)^*$

$= A^* H^* (A)^*$ .... [(13.21.1)ರಿಂದ]

$= A^* H A$ [$\because H = H^*$]

$= P$

$\Rightarrow$ P ಒಂದು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲ.

$\therefore$ $A^* H A$ ಕೂಡ ಒಂದು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

1. ದತ್ತ ಮಂಡಲಗಳ ಪಲ್ಲಟವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$$[0], \; [1 \;\; 2 \;\; 3], \; \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l & m & n \\ m & p & q \\ n & q & r \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ಎಂದಿರಲಿ. AB,

A^1, B^1ಮಂಡಲಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. $(AB)' = B'A'$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

3. 1×1, 2×2, 3×3, ಮತ್ತು 4×4 ವಿಧಗಳ ಸಮಾಂಗ ಮತ್ತು ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲಗಳಿಗೆ ತಲಾ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. A'ವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. AA' ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವೆಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ. B ಒಂದು ಚೌಕಮಂಡಲವಾದಾಗ BB' ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5. $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i3 & -4+i7 \\ 2 & -i & -2+i3 \end{bmatrix}$;

$$B = \begin{bmatrix} 2-i & 0 \\ -1-i & 7+i12 \\ 2 & 4-i5 \end{bmatrix}$$

ಇವುಗಳ ಅನುವರ್ತ, ಪಲ್ಲಟ, ಮತ್ತು ಪಲ್ಲವರ್ತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ತನ್ಮೂಲಕ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

(i) $(\bar{A}) = (A)'$. (ii) $\overline{kA} = \bar{k}\,\bar{A}$.

(iii) $\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$. (iv) $(AB)^* = B^*A^*$.

(v) $\overline{BA} = \bar{B}\,\bar{A}$. (vi) $(BA)^* = A^*B^*$.

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಕೆಲವು ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಎರಡೂ ಅಲ್ಲ. ಮಂಡಲಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿ.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 2i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}$.

(iii) $\begin{bmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$. (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$. (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$. (viii) $\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$.

7. ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕ (vii) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಂಡಲವನ್ನು i ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ: (vi) ಮತ್ತು (vii) ರಲ್ಲಿರುವ ಮಂಡಲಗಳ ಅನುವರ್ತಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

8. $A = \begin{bmatrix} 1-i & 3+i5 & -7+i2 \\ 2+i7 & 3-i4 & 5+i4 \\ -1 & 0 & -1+i \end{bmatrix}$. ಎಂದಿರಲಿ. Aದ ಪಲ್ಲವರ್ತ A^* ವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. $A+A^*$, A^*A ಮತ್ತು AA^* ಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವೆಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ. Aವು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಚೌಕಮಂಡಲವಾದರೂ, ಈ ಗುಣಗಳು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : $(A+A^*)^*$ ವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.]

9. $AB = BA$ ಆದಾಗ $A'B' = B'A'$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $A^*B^* = B^*A^*$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10. A ಒಂದು ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಆಗ $B+iC = A$ ಇರುವಂತೆ, B ಎಂಬ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲವೂ ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವೂ ದೊರೆಯುತ್ತವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11. A ಒಂದು ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಆಗ $B+iC=A$ ಇರುವಂತೆ, B ಎಂಬ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ವಿಷಮಾಂಗ ಮಂಡಲವೂ ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವೂ ದೊರೆಯುತ್ತದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12. A ಒಂದು ಚೌಕಮಂಡಲವಾದಾಗ, $B+C=A$ ಇರುವಂತೆ, B ಎಂಬ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವೂ ಮತ್ತು C ಎಂಬ ವಿಷಮ ಹರ್ಮಿಷಿಯನ್ ಮಂಡಲವೂ ದೊರೆಯುತ್ತದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಸೂಚನೆ: $\frac{A+A^*}{2}$, $\frac{A-A^*}{2}$ ಮಂಡಲಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

13.25 ನಿರ್ಧಾರಕ ಸಂಬಂಧಕ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ **ಮಂಡಲದಲ್ಲಿ** p **ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು** q **ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು** $[0\leq p<m]$: $[0\leq q<n]$**ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ** $p\times q$ **ವಿಧದ ಮಂಡಲವನ್ನು** A**ದ** $p\times q$ **ವಿಧದ ಉಪಮಂಡಲವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.**

ಉದಾ : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 8\end{bmatrix}$ **ಆದರೆ,** $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},$$

$$[1\ 2\ 3],\ [1],[8],\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$, ಇತ್ಯಾದಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಯೊಂದೂ A ಮಂಡಲದ ಉಪಮಂಡಲವಾಗುತ್ತವೆ.

ಟೀಕೆ : nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲ Aದಿಂದ a_{ij} ಮೂಲಾಂಶವಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ $n-1 \times n-1$ ವಿಧದ ಉಪಮಂಡಲವನ್ನು α_{ij} ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಉದಾ : (i) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ಆದರೆ,

$\alpha_{11} = a_{11}$ ಮೂಲಾಂಶವಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ Aಯ ಉಪಮಂಡಲ.

$$= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\alpha_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $\alpha_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, ಆದರೆ, $\alpha_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\alpha_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(iii) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವಾದಾಗ, $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಮಂಡಲವಾಗುತ್ತದೆ.

13.26 ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಂಡಲದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. S ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ಮಂಡಲಗಳ ಗಣ ಮತ್ತು R ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾದಾಗ,

$$f : S \rightarrow R$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. f ನ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡಬಹುದು.

(i) $f([a_{ij}]_{m \times n}) = m \times n$ ಆದರೆ,

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2 \times 3 = 6;$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 \times 2 = 6.$$

(ii) $f([a_{ij}]_{m \times n}) = \sum_{m=1}^{n} a_{mj}$ ಆದರೆ,

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = \sum_{j=1}^{4} a_{2j}$$

$$= 0 + 1 + 4 + 5 = 10.$$

(iii) $f([a_{ij}]_{m \times n}) = \sum_{j=1}^{r} a_{ji}$, $r =$ ಕನಿಷ್ಠ (m, n).

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & 0 & -5 \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$= 1 + 4 + 0 = 5.$$

(iv) $f([a_{ij}]_{m \times n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) f(\alpha_{11})$,

ಮತ್ತು $f([a_{ij}]_{1\times n}) = \sum_{j=1}^{n} a_{j1}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\text{ಆಗ, } f\left(\left|\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right|\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{4} a_{1j}\right) f(\alpha_{11})$$

$$= (1+2+3+4)\ f\left(\left|\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right|\right)$$

$$= 10 \times \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) \quad f([4\ 5\ 6])$$

$$= 10 \times (3+4+5) \times (4+5+6)$$

$$= 10 \times 12 \times 15 = 1800.$$

ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಿರುವ ಸಂಬಂಧಕಗಳು [(i) ರಿಂದ (iv)]

$f : S \to R$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕಕ್ಕೆ ವಿವಿಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಬಲ್ಲವೇ ಹೊರತು, ಮಂಡಲಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಾವರೀತಿ f ಸಂಬಂಧಕದ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡಿದಲ್ಲಿ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಹಲವು ಶಾಖೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ವಿಶೇಷವಾಗಿ, ಮಂಡಲಗಳ

ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮೂಡುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸಿರುವ

$$\triangle : M \to R$$

ಸಂಬಂಧಕದಲ್ಲಿ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $M = \{m \,/\, m = \text{ಚೌಕಮಂಡಲ}\} \subset S =$ ಮಂಡಲಗಳ ಗಣ.

13.27 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಚೌಕಮಂಡಲಗಳ ಗಣ M ದಿಂದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ Rಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಕ

$$\triangle : M \to R$$

ಎಂಬುದರ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು

(i) $\triangle([a_{11}]) = a_{11}$,

(ii) $A = [\, a_{ij} \,]_{n \times n}$ **ಇರುವಾಗ,**

$$\triangle([\, a_{ij} \,]_{n \times n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \; \triangle(\alpha_{1j})$$

ಎಂದು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿದ △ ವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕ ಸಂಬಂಧಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : (i) $A = [5]$; $\triangle\,(A) = 5$.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$.

$$\triangle(A) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \triangle(\alpha_{1j})$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \triangle(\alpha_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \triangle(\alpha_{12})$$

$$= 2 \triangle([-5]) - 3 \triangle([4])$$

$$= 2(-5) - 3(4) \quad \ldots \qquad [\text{ಏಕೆ ?}]$$

$$= -22.$$

ಟೀಕೆ : A ವು 2ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲವಾದಾಗ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ $\triangle(A)$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

$$\triangle\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \ldots \quad (13.27.1)$$

ಉದಾ : (a) $\triangle\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\right) = 2.-5 - 3.4 = -22.$

(b) $\triangle\left(\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\right) = \sin\theta.\sin\theta - \cos\theta.-\cos\theta$

$$\text{(iii)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ ಆದಾಗ } \Delta(A) = ?$$

$$\Delta(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{l+j} a_{ij} \quad \Delta\ (\alpha)_{ij}$$

$$a_{11}\ \Delta(\alpha_{11}) - a_{12}\Delta(\alpha^{12}) + a_{13}\Delta(\alpha_{13})$$

$$= 1.\ \Delta\left|\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right| - 2\ \Delta\left|\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right|$$

$$+3\ \Delta\left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right|$$

$$= 1.(3.5-4.4) - 2.(2.5-4.3) + 3(2.4-3.3)$$

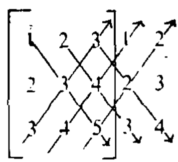
$$= 0$$

Aಯು ಯಾವುದೇ 3ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಂಡಲವಾದಾಗ $\Delta(A)$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆಯಲ್ಲಿದೆ.

1. ದತ್ತ ಮಂಡಲದ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಮೊದಲ ಎರಡು ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಆವರ್ತಿಸೋಣ.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{array}$$

2. ಹೀಗೆ ಪಡೆದ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಛೇದಿಸೋಣ,



(13.27.2)

3. ಆಗ Δ (A)= 'ಕೆಳಮುಖ ಬಾಣಗಳು ಗುರ್ತಿಸುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ'—'ಮೇಲ್ಮುಖ ಬಾಣಗಳು ಗುರ್ತಿಸುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ.'

ಅಂದರೆ, $\Delta(A)=(1.3.5+2.4.3+3.2.4) - (3.3.3+4.4.1+5.2.2)$

$=0.$

13.28 **ಟೀಕೆ :** ನಿರ್ಧಾರಕ ಸಂಬಂಧಕದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸುವ ಮುನ್ನ ಒಂದು ಮಾತನ್ನು ಹೇಳಬಯಸುತ್ತೇವೆ. ಆದಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು, ನಿರ್ಧಾರಕ ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು, ಸರಳವಾಗಿ **ನಿರ್ಧಾರಕ** ಎಂದು ಕರೆದಿದ್ದಾರೆ. ರೂಢಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಪದವೇ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಈ ಪುಸ್ತಕದುದ್ದಕ್ಕೂ **'ನಿರ್ಧಾರಕ ಸಂಬಂಧಕ'** ಎನ್ನುವ ಪದದ ಬದಲು **'ನಿರ್ಧಾರಕ'** ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಲ್ಲದೆ $\triangle(A)$ **ಎಂಬ ಸಂಕೇತದ ಬದಲು '|A|' [ನಿರ್ಧಾರಕ A ಎಂದು ಓದಿ] ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.**

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ಆದಾಗ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ಎಂಬುದನ್ನು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $|A| = \Delta\ (A)$ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

13.29 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :** $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ **ಆಗಿರಲಿ. ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ** A_{ij} **ಎಂದು ಬರೆಯುವ,** a_{ij} **ಮೂಲಾಂಶದ ಅನುಗುಣಕವನ್ನು**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \ |\propto_{ij}|$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $\propto_{ij}$ ವು A ಮಂಡಲದಿಂದ a_{ij} ಮೂಲಾಂಶವಿರುವ ಅಡ್ಡ ಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಉಪ ಮಂಡಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಅಲ್ಲದೆ,

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \ \Delta(\propto_{1j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{1+j} \ |\propto_{1j}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \quad A_{1j}$$

$$= a_{11} \, A_{11} + a_{12} \, A_{12} + \dots + a_{1n} \, A_{1n}.$$

ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿದಲ್ಲಿಡೋಣ.

ಉದಾ : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ -7 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $|A| = ?$

$$\therefore \quad |A| = (2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

[(13.29.1) ರಿಂದ]

$$+ (-5) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -7 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} - (4) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -7 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

(13.27.2) ರಲ್ಲಿರುವ ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಮೇಲಿರುವ 3ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ,

$$= (2)(10) - (3)(80) + (-5)(-38) - (4)(-234)$$

$$= 906$$

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕ Aಯು ಬೆಲೆಯನ್ನು 13.30 ರಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರುವ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೂಲಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

13.33 **ಉದಾ :** Aಯು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ. ಓದುಗನು ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿನ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಅನುಕೂಲ ಹಾಗೂ ಅನಾನುಕೂಲಗಳನ್ನು ತುಲನೆಮಾಡುವುದೊಳ್ಳೆಯದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.5

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ $|A| = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

2. $\left| \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \right| = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.

3. $A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ ಎಂದಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ,

(i) $|A| = -12$

(ii) $|A| = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$. ಇದನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕ Aದ 2ನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(iii) $|A| = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$. ಇದನ್ನು $|A|$ಯ 3ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(iv) $a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = |A|$. ಇದನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕ Aಯ 1ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(v) $|A| = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}$. ಇದನ್ನು $|A|$ಯ 2ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(vi) $|A| = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}$. ಇದನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕ Aಯ 3ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ,

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : **ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಅಥವಾ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.**

4. $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$: $|A| = |A^1|$ ಎಂದು **ತೋರಿಸಿರಿ.**

5. $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{bmatrix}$

$|B| = |C| = -|A|$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ Aವು 4ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಂಡಲವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. A ಮಂಡಲದಿಂದ B ಮಂಡಲವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, Aದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳಾವುವು ? ಇದೇ ರೀತಿ C ಮಂಡಲವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಬೇಕಾದ ನೀಟಸಾಲುಗಳಾವುವು ? ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & p & q \\ u & v & v \\ l & m & m \end{vmatrix} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. $k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 \\ b_1 & kb_2 & b_3 \\ c_1 & kc_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

8. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ಆದಾಗ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

9. $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

10. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+la_2 & a_2 & a_3 \\ b_1+lb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1+lc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

11. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ, ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : **ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ಕೆಳಗಿರುವ ಮೂಲಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಕರ್ಣ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ.** ಈ ನಿಯಮವು ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿರುವ ಮೂಲಾಂಶಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ.

13. 30 ನಿರ್ಧಾರಕದ ಮೂಲ ಗುಣಗಳು :

1. ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ (ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವೂ ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. (ಏಕೆ ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.)

2. ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಸಹಗಾಮಿ ನೀಟಸಾಲುಗಳೊಂದಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿದರೆ ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

[ಅ—13.5.4 ನೋಡಿರಿ].

3. ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲು (ನೀಟಸಾಲು)ಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿದರೆ, ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರದ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ,
[ಅ– 13.5.5 ನೋಡಿರಿ].

4. ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲು (ನೀಟಸಾಲು)ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಾದರೆ, ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.
[ಅ—13.5.6 ನೋಡಿರಿ].

5. ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ (ನೀಟಸಾಲಿನ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು k ಎಂಬ ಅದಿಶದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು k ದಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. [ಅ—13.5.7 ನೋಡಿರಿ].

6. ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲಿ (ನೀಟಸಾಲಿ) ನಲ್ಲಿರುವ ಸಹಗಾಮಿ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಪ್ರಮಾಣ ಒಂದೇ ಆದರೆ, ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. [ಅ—13.5.8 ನೋಡಿರಿ].

7. ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರ ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿ (ನೀಟಸಾಲಿ) ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಅದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. [ಅ—13.5.9 ನೋಡಿರಿ],

8. ನಿರ್ಧಾರಕವೊಂದರಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ (ನೀಟಸಾಲಿನ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವನ್ನೂ k ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ (ನೀಟಸಾಲಿನ) ಸಹಗಾಮಿ ಮೂಲಾಂಶಕ್ಕೆ ಕೂಡಿದರೆ, ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. [ಅ—13.5.10 ನೋಡಿರಿ].

9. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ಆಗಿರಲಿ. ನಿರ್ಧಾರಕ Aಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು, $|A|$ ವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಅಥವಾ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ : i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆ :

$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} ;$$

jನೇ ಸ್ತಂಭಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆ :

$|A| = a_{1j}$

$|A| = a_{1j}\ A_{1j} + a_{2j}\ aA_{2j} + \dots + a_{nj}\ A_{nj}$

[ಅ—13.5.3 ನೋಡಿರಿ]

13.31 ಪ್ರಮೇಯ : $A = [\ a_{ij}\ ]_{n \times n}$ ಆದರೆ,

$$a_{i1}\ A_{j1} + a_{i2}\ A_{j2} + \dots + a_{in}\ A_{in} = \begin{cases} |A|, & j=i \\ O, & j \neq i \end{cases}$$

ಸಾಧನೆ : $j=i$ ಅಂದುಕೊಳ್ಳಿ,

ಎಡಬದಿ $= a_{i1}\ A_{i1} + a_{i2}\ A_{i2} + \dots + a_{jn}\ A_{in}$

$=$ ನಿರ್ಧಾರಕ A ದ iನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆ

$= |A|$

ಈಗ $R_i \equiv R_j$ ಮತ್ತು $i \neq j$ ಅಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$\therefore\quad a_{i1} = a_{j1}\ ,\quad a_{i2} = a_{i2} \dots ,a_{in} = a_{in}$

$\therefore$ ಎಡಬದಿ $= a_{j1}\ A_{j1} + a_{j2}\ A_{j2} + \dots + a_{in}\ A_{in}$

$=$ ನಿರ್ಧಾರಕ Aದ jನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆ

$= |A| = 0 \quad \dots \quad [\because R \equiv R_j\ ]$

ಅನುಮಿತ : $a_{1j}\ A_{1j} + a_{2i}\ A_{2i} + \dots + a_{ni}\ A_{ni} = \begin{cases} |A|, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

ಸಾಧನೆ : $|A| = |A'|$ ಇರುವುದರಿಂದ, ಇದು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : **ದತ್ತ ಮಂಡಲದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ (ನೀಟಸಾಲಿನ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವನ್ನು ಬೇರೆ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ (ನೀಟಸಾಲಿನ) ಮೂಲಾಂಶದ ಸಹಗಾಮಿ ಅನುಗುಣಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಹೀಗೆ ಪಡೆದ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಮೊತ್ತ ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ.**

13.32 **ಟೀಕೆ :** ಅನುಕೂಲದ ಸಲುವಾಗಿ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ನೀಟಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $R_1, R_2, R_3, \ldots$ ಮತ್ತು $C_1 \cdot C_2, C_3, \ldots$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

(i) $R_1 \equiv R_2$: **1ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು 2ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿವೆ.**

$C_2 \equiv C_4$: **2ನೇ ನೀಟಸಾಲು ಮತ್ತು 4ನೇ ನೀಟಸಾಲು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿವೆ.**

ಉದಾ :
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{ಇಲ್ಲಿ } C_2 \equiv C_3. \quad \therefore D = 0 \text{ [13.3.0-4ರಿಂದ]}$$

(ii) $R_3 \times k$: **3ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು kದಿಂದ ಗುಣಿಸೋಣ.**

$C_2 \times p$: **2ನೇ ನೀಟಸಾಲನ್ನು pದಿಂದ ಗುಣಿಸೋಣ.**

ಉದಾ :
$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix},$$

$$R_3 \times 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -1 \times 2 & -2 \times 2 & -3 \times 2 \end{vmatrix},$$

$$= D \times 2 \text{ [13.30–5.ರಿಂದ]}$$

(iii) $R_1 \propto R_2$: 1ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಮತ್ತು 2ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಹಗಾಮಿ ಮೂಲಾಂಶಗಳ ಪ್ರಮಾಣ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾ : $$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix};$$

ಇದರಲ್ಲಿ $R_1 \propto R_2 \because \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

$\therefore D = 0$ [13·30—6. ರಿಂದ]

(iv) $C_2 + k_1C_1 + k_2C_3$: 1 ಮತ್ತು 3ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು k_1 ಮತ್ತು k_2 ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 2ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ಸಹಗಾಮಿ ಮೂಲಾಂಶಕ್ಕೆ ಕೂಡೋಣ.

ಉದಾ : $$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \\ -11 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$C_2 + C_1 - 2C_3 \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & 2-2\times 1 & 1 \\ 4 & -6+4-2(-1) & -1 \\ -11 & 1-11-2(-5) & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -11 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \quad \ldots\ldots \quad [13.30\text{—}1. \text{ ರಿಂದ}]$$

(v) $R_2 \longleftrightarrow R_3$: 2ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು 3ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡೋಣ.

ಉದಾ : $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

$$R_1 \longleftrightarrow R_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -D \quad \ldots\ldots \quad [13.30\text{—}3. \text{ ರಿಂದ}]$$

13.33 **ಉದಾ :**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ -7 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad |A| = ?$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ -7 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

A ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, C_4 ನಲ್ಲಿರುವ R_1, R_3 ಮತ್ತು R_4ಗಳ ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯಕ್ಕಿಳಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯೋಣ.

$$R_1+(-4)R_2;\ R_3+(-3)R_2;\ R_4+(-2)(R_2) \Rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-4(4) & 3-4(2) & -5-4(3) & 4-4(1) \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ -7-3(4) & 6-3(2) & 4-3(3) & 3-3(1) \\ 5-2(4) & 6-2(2) & 1-2(3) & 2-2(1) \end{vmatrix}$$

[13.30–8. ರಿಂದ]

$$= \begin{vmatrix} -14 & -5 & -17 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ -19 & 0 & -5 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = [\ a_{ij}\ ]_{4\times 4} \text{ ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.}$$

ನಾಲ್ಕನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯಿಂದ :

$$= a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}+a_{44}A_{44}$$

$$= (-1)^{2+4} \cdot |\alpha|_{24}$$

$$= \begin{vmatrix} -14 & -5 & -17 \\ -19 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

2ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯಿಂದ :

$$= -(-19) \begin{vmatrix} -5 & -17 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 0 - (-5) \begin{vmatrix} -14 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 19\,(25+34) + 5\,(-28-15)$$

$$= 19 \times 59 - 5 \times 43 = 906$$

13.34 ಉದಾ :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} ; \quad |A = ?$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿರುವ ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯಕ್ಕಿಳಿಸಿ. A ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$C_2 - C_1 \Rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & +1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow\rightarrow C_3 \Rightarrow$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_2 - 2C_1 \Rightarrow$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-3C_4 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & -9 \\ -1 & 5 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$C_4 + C_2 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -10 \\ -1 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$10C_3 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -30 & -10 \\ -1 & 5 & 40 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-3C_4 \Rightarrow$$

$$= -\frac{1}{90}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -30 & 30 \\ -1 & 5 & 40 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_4 + C_3 \Rightarrow$$

$$= -\frac{1}{90}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -30 & 0 \\ -1 & 5 & 40 & 43 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{90}(1)(-3)(-30)(43) = -43$$

[ಅ–13.5.11 ನೋಡಿರಿ.]

13.35 ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

$C_2 - C_1$ ಮತ್ತು $C_3 - C_2 \Rightarrow C_2 + (-1)C_1$ ಇತ್ಯಾದಿ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad [13 \cdot 30 - 8 \cdot \text{ರಿಂದ}]$$

$$= 0 \quad \ldots \quad (\because \; C_2 \equiv C_3)$$

2) $$\begin{vmatrix} 35 & 20 & 17 \\ 21 & 12 & 9 \\ 14 & 8 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \times 5 & 4 \times 5 & 17 \\ 7 \times 3 & 4 \times 3 & 9 \\ 7 \times 2 & 4 \times 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \begin{vmatrix} 5 & 4 \times 5 & 17 \\ 3 & 4 \times 3 & 9 \\ 2 & 4 \times 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad [13.30 - 5. \text{ ರಿಂದ}]$$

$$= 7 \times 5 \begin{vmatrix} 5 & 5 & 17 \\ 3 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 35 \times 0 = 0 \quad [\because \; C_1 \equiv C_2]$$

3) $$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c_3 \end{vmatrix}$$

R_1-R_2 ಮತ್ತು $R_3-R_2 \Rightarrow$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^3-b^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c-b & c^3-b^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1.(a-b) & (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ 1 & b & b^3 \\ 0 & 1.(c-b) & (c-b)(c^2+cb+b^2) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & b & b^3 \\ 0 & 1.(c-b) & (c-b)(c^2+cb+b^2) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(c-b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & b & b^3 \\ 0 & 1 & c^2+cb+b^2 \end{vmatrix}$$

1ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯಿಂದ :

$$= (c-b)(c-b).(-1)^{2+1}.1 \begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & c^2+cb+b^2 \end{vmatrix}.$$

$$= -(a-b)(c-b)\{(c^2+cb+b^2)-(a^2+ab+b^2)\}$$

$$= -(a-b)(c-b)\{c^2-a^2+cb-ab\}$$

$$= -(a-b)(c-b)\{(c-a)(c+a)+b(c-a)\}$$

$$= -(a-b)(c-b)\quad\{(c-a)(c+a+b)\}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

4)
$$D = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$R_1+R_2+R_3 \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2c+2b+2a & b+c+2a & b \\ 2c+2a+2b & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= (2a+2b+2c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2c \end{vmatrix}$$

R_1-R_2 ಮತ್ತು R_3-R_2 $\Rightarrow$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -(b+c+a) & 0 \\ 1 & b+c+2a & b \\ 0 & -(b+c+a) & c+a+b \end{vmatrix}$$

1ನೇ ಮತ್ತು 3ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಿಂದ $(b+c+a)$ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ;

$$= 2(a+b+c)(b+c+a)(b+c+a)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & b+c+2a & b \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಿಂದ ;

$$= 2(a+b+c)^3 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^3,$$

5

$$D = \begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix}$$

2ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೂಲಾಂಶವೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

13.30—7. ರಿಂದ ;

$$= \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ c+a & b & b \\ a+b & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & -b & a \\ c+a & -c & b \\ a+b & -a & c \end{vmatrix}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ $C_2 \equiv C_3$.

$$\therefore D = 0 + \begin{vmatrix} b+c & -b & a \\ c+a & -c & b \\ a+b & -a & c \end{vmatrix}$$

$$R_1 + R_2 \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} c & -b & a \\ a & -c & b \\ b & -a & c \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2 \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$ [ಏಕೆ ?]

$$R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} b+c+a & c+a+b & a+b+c \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= (b+c+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$C_2 - C_1$ ಮತ್ತು $C_2 - C_3 \Rightarrow$

$$= (b+c+a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-a \\ a & b-a & c-b \end{vmatrix}$$

1ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯಿಂದ :

$$= b+c+a \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a-c & b-a \\ b-a & c-b \end{vmatrix}$$

$$= (b+c+a)\ \{(a-c)(c-b)-(b-a)(b-a)\}$$

$$= (b+c+a)\ \{(ac-ab-c^2+cb-(b2-2ab+a^2)\}$$

$$= (b+c+a)(ac+ab+cb-c^2-b^2-a^2)$$

$$= (a+b+c) \cdot -1 \cdot (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= -(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

$$= 3abc-a^3-b^3-c^3.$$

6. $$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$c_1+c_2+c_3+c_4 \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$c_2 - c_1$; $c_3 - c_1$; $c_4 - c_1$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

c_2, c_3 ಮತ್ತು c_4 ಗಳಲ್ಲಿ $(a-1)$ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ :

$$D = (a+3)\ (a-1)\ (a-1)\ (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\ (a-1)^3 .\ 1.1.1.1$$

$$= (a+3)\ (a-1)^3 .$$ [ಅ-13.5.11 ನೋಡಿರಿ]

ಅಭ್ಯಾಸ 13.6

1. ವಿಸ್ತರಿಸದೆಯೇ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & -4/3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}. \quad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 20 & 10 & -30 \\ 1 & \frac{1}{2} & -3/2 \\ 1\frac{3}{4} & 1 & 1\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{vmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix}. \quad \text{(iv)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -9 \end{vmatrix}.$$

2. ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ a_{21}, a_{31} ಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಿ, 1ನೇ ನೀಟಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ, ದತ್ತ ನಿರ್ಧಾರಕ Aಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 5 & -32 & -31 \\ 6 & -42 & 38 \end{vmatrix}. \quad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -8 & 41 & -30 \\ -7 & 37 & -29 \end{vmatrix}.$$

$$\text{(iii)} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 6 & 15 & 25 \\ 10 & 28 & 49 \end{vmatrix}. \quad \text{(iv)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

3. ಇವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ:

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = 0$$

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸದೆಯೇ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(i) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}$$

(ii) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$$

(iii) $$\begin{vmatrix} b+c & a+b & c+a \\ c+a & b+c & a+b \\ a+b & c+a & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

(iv) $$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0.$$

(v) $$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$$

5. ಇವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ:

(i) $$\begin{vmatrix} x & x & x \\ x & y & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = x(x-y)(y-z).$$

(ii) $$\begin{vmatrix} c+b & c & b \\ c & c+a & a \\ b & a & b+a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

(iii) $$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

(iv) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta$$

(v) $$\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & a & 1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

(vi) $$\begin{vmatrix} \beta+\gamma-\alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \gamma+\alpha-\beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta-\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \propto & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \propto \\ \gamma & \propto & \end{vmatrix}$$

(vii) $$\begin{vmatrix} (x-2)^2 & (x-1^2) & x^2 \\ (x-1)^2 & x^2 & (x+1)^2 \\ x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \end{vmatrix} = -8.$$

(viii) $$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2abc\,(a+b+c)^2.$$

6. $$\begin{vmatrix} \mu\gamma & \mu+\gamma & 1 \\ \gamma\lambda & a+\lambda & 1 \\ \lambda\mu & \lambda+\mu & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-\mu)(\mu-\gamma)$$

$(\gamma-\mu)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. $$\begin{vmatrix} bc & bc^1+b^1c & b^1c^1 \\ ca & ca^1+c^1a & c^1a^1 \\ ab & cb^1+a^1b & a^1b^1 \end{vmatrix} = (ab^1-a^1b)(bc^1-b^1c)(cb^1-c^1b)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

{ಸೂಚನೆ ; $\dfrac{R_1}{b^1c^1}$; $\dfrac{R_2}{c^1a^1}$; $\dfrac{R_3}{a^1b^1}$ ಮತ್ತು $\dfrac{b}{b^1} = \mu$;

$$\frac{c}{c^1} = \gamma \; ; \; \frac{a}{a^1} = \lambda$$

[ಎಂದಿಟ್ಟು ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.]

8. $$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

9. $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4 \times \left\{ 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4} \right\}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

10. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (\sum a)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(c+b-c\cdots$$

ಎಂದು ತೋ...

12. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = \cdots$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

13. $$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = x^3 (x+a+\cdots +\cdots$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ,

14. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

15. $$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

16. $$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -x & -y & 0 & a \\ -z & -b & a- & 0 \end{vmatrix} = (ax+cz-by)^2$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

17. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} =$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

18. $$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix}$$

$= (a^2+b^2+c^2+d^2+1)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

19. $$\begin{vmatrix} b^2+c^2+1 & c^2+1 & b^2+1 & b+c \\ c^2+1 & c^2+a^2+1 & a^2+1 & c+a \\ b^2+1 & a^2+1 & a^2+b^2+1 & a+b \\ b+1 & c+a & a+b & 3 \end{vmatrix}$$

$= (bc+ca+ab)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

20. $$\begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

13.36 ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ :

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z &= d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad \text{....(13.36.1)}$$

ಎಂಬ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$ ಎಂದಿರಲಿ

$$D_x = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$C_1 + C_2y + C_3z \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad [(13, 36.1) \text{ ರಿಂದ}]$$

$= D_x$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ x = \frac{D_x}{D}$$

D_x ನಿರ್ಧಾರಕವು Dದಿಂದ C_1ನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಮತ್ತೆ,

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & b_1y & c_1 \\ a_2 & b_2y & c_2 \\ a_3 & b_3y & c_3 \end{vmatrix}$$

$$C_2 + C_1x + C_3z \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x + b_1y + c_1z & c_1 \\ a_2 & a_2x + b_2y + c_2z & c_2 \\ a_3 & a_3x + b_3y + c_3z & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ .... [ಏಕೆ ?]

$= D_y$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \; y = \frac{Dy}{D}.$$

ಇದೇ ರೀತಿ $z = \dfrac{Dx}{D}$, ಇಲ್ಲಿ

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ :
$x + y + z = 2$
$2x - 3y - z - 2 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.
$x - 2y - 3z = 3$

ಇದರಲ್ಲಿ $D_z = 2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. [ಏಕೆ ?]

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=11;\quad D_x=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}=22;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=11;\quad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-11.$$

$$\therefore\ x=\frac{D_x}{D}=\frac{22}{11}=2,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{11}{11}=1,$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-11}{11}=-1.$$

$x+y+z=2+1-1=2=$ ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿ.

13.37 **ಉದಾ :** ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x, y, z ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸೋಣ.

$$ax+hy+g=0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$
$$hx+by+f=0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$
$$gx+fy+c=0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(iii)}$$

$D=\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}\neq 0$ ಆದಾಗ (i) ಮತ್ತು (ii) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -g & h \\ -f & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}} \quad ; y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & -g \\ h & -f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}}$$

ಹೀಗೆ ಪಡೆದ x, y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (iii)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ.

$$g\frac{D_x}{D} + f\frac{D_y}{D} + c = 0$$

$$\Rightarrow gD_x + fD_y + cD = 0$$

$$\Rightarrow g\begin{vmatrix} -g & h \\ -f & b \end{vmatrix} + f\begin{vmatrix} a & -g \\ h & -f \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = 0$$

$$g\begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & g \\ h & f \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0. \qquad [R_3\text{ರ ವಿಸ್ತರಣೆ}]$$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.7

ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (ಲೆಕ್ಕಗಳು 1—10) ಬಿಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

1. $5x+6y-3=0$ 2. $6x+5y=2$
   $3x-4y+21=0$ $4x-3y=14$

3. $7x+11y=4$
$9x+8y=-1$

4. $x+y=a$
$x-y=\sqrt{a^2-b}$

[5.4 ನೋಡಿರಿ]

5. $x-y+z=0$
$2x+3y-5z=7$
$3x-4y-2z=-4$

6. $2x+3y+z=0$
$x-y+2z=3$
$-3x+2y-z=1$

7. $2x-3y=1$
$x-2y+z+1=0$
$x-y-2z=4$

8. $x+y+z=1$
$ax+by+cz=k$
$a^2x+b^2y+c^2z=k^2$

9. $ax+by+cz=k$
$a^2x+b^2y+c^2z=k^2$
$a^3x+b^3y+c^3z=k^3$

10. $ax+by+cz=0,\quad bx+cy+az=0,$

$cx+ay+bz=0$ ಮತ್ತು x, y, z ಗಳು ಶೂನ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನ ಎಂದು ತಿಳಿದು, $a^3+b^3+c^3=3abc$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x, y, zಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿರಿ].

11. $x=\dfrac{a}{b-c},\ y=\dfrac{b}{c-a},\ z=\dfrac{c}{a-d}$ ಆದರೆ,

$xy+yz+zx+1=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13.38 ಮಂಡಲದ ಪ್ರತಿಲೋಮ :

ಯಾವುದೇ ಒಂದು n ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಂಡಲ A ಆದಾಗ,

$$AB=BA=I_n$$

ಇರುವಂತೆ B ಎಂಬ ಒಂದು ಮಂಡಲವು ದೊರೆಯುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ B ಯನ್ನು A ಯ ಪ್ರತಿಲೋಮವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ಎಂದಿರಲಿ. ಈ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ಆದರೆ, $AB = BA = I_2$.

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

$\therefore$ B ಯು A ಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -20+21 & 28-28 \\ -15+15 & 21-20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

ಇದೇ ರೀತಿ $BA = I_2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$\therefore$ Aಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ = B.

13.39 **ಪ್ರಮೇಯ : Aಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ದೊರೆಯುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.**

ಸಾಧನೆ ; ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ B ಮತ್ತು C ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ Aಯ ಪ್ರತಿಲೋಮವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$\therefore \quad AB = BA = I_n$ .... (i)

ಮತ್ತು $AC = CA = I_n$ .... (ii)

ಈಗ $B = B(I_n)$ [(13.13.3) ನೋಡಿರಿ]

$= B(AC)$ .... [(ii) ರಿಂದ]

$= (BA)C$ .... [ಏಕೆ ?]

$= I_nC$ .... [(i) ರಿಂದ]

$= C$ .... [ಏಕೆ ?]

ಇದರಿಂದ ಸಾಧನೆಯು ಪೂರ್ತಿಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ Aಯ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು

A^{-1} ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ,

$$AA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$ ಎಂದು ಹೇಳುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲ ;

A^{-1} ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ಸಂಕೇತಮಾತ್ರವೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

13.40 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : Aಯು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಂಡಲವಾದಾಗ :**

$$[\,A_{ij}\,]_{n \times n}$$

ಮಂಡಲವನ್ನು Aಯ **ಅನುಗುಣಕ ಮಂಡಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.**

ಉದಾ : (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\text{Aಯ ಅನುಗುಣಕ ಮಂಡಲ} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, Aಯ ಅನುಗುಣಕ

$$
\text{ಮಂಡಲ} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 5 & 10 & -9 \\ -3 & -6 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}
$$

13.41 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಂಡಲ A ಆದಾಗ, Aಯ ಅನುಗುಣಕ ಮಂಡಲದ ಪಲ್ಲಟವನ್ನು Aಯ ಅನುಪಲ್ಲಟ ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (i). $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

Aಯ ಅನುಗುಣಕ ಮಂಡಲ $= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$;

$$\therefore \quad A\text{ಯ ಅನುಪಲ್ಲಟ} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$; .... [**ಮೇಲಿನ ಉದಾ : (ii)** ನೋಡಿ]

$$B\text{ಯ ಅನುಪಲ್ಲಟ} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -9 \\ -3 & -6 & 5 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 10 & -6 & -5 \\ -9 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

A ಮಂಡಲದ ಅನುಪಲ್ಲಟವನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ **ಅನುಪ** (A) ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

$$A = [\ a_{ij}\ ]_{n \times n}$$ ಆದರೆ,

$$\text{ಅನುಪ}\ (A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= [\ A'_{ij}\ ]_{n \times n}\ ;\quad A'_{ij} = A_{ij}$$

13.42 **ಪ್ರಮೇಯ : A ಒಂದು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಚೌಕಮಂಡಲ ಮತ್ತು $|A| \neq 0$ ಆದಾಗ,**

$$A \times \text{ಅನುಪ}\ (A) = \text{ಅನುಪ}\ (A) \times A = I_n\ |A|$$

ಸಾಧನೆ :

$$\text{ಎಡಬದಿ} = [\ a_{ij}\ ]_{n \times n} \times [\ A'_{ij}\ ]_{n \times n}$$

$$= [C_{ik}\ ]_{n \times n}$$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ $c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A'_{jk}$, ಇಲ್ಲಿ $A'_{ki} = A_{jk}$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}$$

$$= a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots a_{in} A_{kn}$$

$$= \begin{cases} |A|, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$ .... [13.31 ಪ್ರಮೇಯ ನೋಡಿರಿ.]

$\therefore$ $c_{ij} = |A| =$ ಕರ್ಣಮೂಲಾಂಶ ;

$c_{ik} = 0 =$ ಕರ್ಣೇತರ ಮೂಲಾಂಶ, $i \neq k$

$$\therefore \quad A \times \text{ಅನುಪ}(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= I_n \times |A|.$$

ಇದೇರೀತಿ ಅನುಪ $(A) \times A = I_n \times A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

13.43 **ಪ್ರಮೇಯ :** Aಯು ಯಾವುದೇ ಒಂದು nನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಂಡಲ ಮತ್ತು $|A| \neq 0$ ಆದಾಗ Aಯು ಪ್ರತಿಲೋಮವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಮತ್ತು

$$A^{-1} = \frac{\text{ಅನುಪ } (A)}{|A|} \quad \dots \quad (13.43.1)$$

ಸಾಧನೆ : $A \times \frac{\text{ಅನುಪ } (A)}{|A|}$

$$= \frac{A \times \text{ಅನುಪ } (A)}{|A|}$$

$$= \frac{I_n \times |A|}{|A|} = I_n.$$

ಇದೇರೀತಿ $\frac{\text{ಅನುಪ } (A)}{|A|} \times A = I_n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{ಅನುಪ } (A)}{|A|} \quad \dots \quad 1$$

ಉದಾ : (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $|A| = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

ಅನುಪ $|A| = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{ಅನುಪ } (A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}{-2}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$|A| = 1(5) - 2(-10) + 3(11+8) = -2.$

$$\text{ಅನುಪ } (A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 10 & -6 & -2 \\ -9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

[ಏಕೆ ? 13.41ರಲ್ಲಿ ಉದಾ : (ii) ನೋಡಿರಿ.]

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ ಅನುಸ } (A)$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 10 & -6 & -2 \\ -9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 9/2 & -5/2 & -1 \end{bmatrix}$$

13.44 **ಪ್ರಮೇಯ :** (i) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ ಇಲ್ಲಿ AB **ಗುಣಾ ಕಾರವು ಮಾನ್ಯ**

ಸಾಧನೆ : (i) **ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :**

$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \times$ **ಎಂದಿರಲಿ,** .... (i)

(i) ರ ಎರಡು ಬದಿಯನ್ನು A^{-1} ನಿಂದ ಹಿಂಗುಣಿಸೋಣ.

$$A^{-1}\left(A^{-1}\right) = A^{-1}X$$

$$\therefore \quad I = A^{-1}X$$

ಇದರ ಎರಡು ಬದಿಯನ್ನೂ Aದಿಂದ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸೋಣ.

$$AI = A\,A^{-1}X$$

$$\because \quad A = \left(A\,A^{-1}\right)X \quad \ldots \quad [\text{ಏಕೆ ?}]$$

$$= IX$$

$$= X = \left(A^{-1}\right)^{-1} \quad [(i)\ \text{ರಿಂದ}]$$

(ii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$X = B^{-1}A^{-1}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$(AB)X = (AB)B^{-1}A^{-1} \quad \ldots \quad [\text{ಏಕೆ ?}]$$

$$= A\left(B\,B^{-1}\right)A^{-1}$$

$$= A\,(I_n)\,A^{-1}$$

$$= A\,A^{-1}$$

$$= I_n.$$

ಇದೇರೀತಿ $X(AB) = \left(B^{-1}A^{-1}\right)AB$
$= I_n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \quad (AB)X = X(AB) = I_n$$

$$\Rightarrow \quad X = (AB)^{-1}$$

$$\therefore \quad B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

ಅನುಮಿತ : ಗುಣಾಕಾರವು ಮಾನ್ಯವಾದಾಗ,

(i) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

(ii) $(A_1A_2A_3 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಓದುಗನಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

13.45 **ಟೀಕೆ :** 13.36 ರಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x-3y-z=2 \\ x-2y-3z=3 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (13.45.1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \ldots (13.45.2)$$

(13.45.1) ಮತ್ತು (13.45.2) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

$\because$ (13.45.2) $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x - 3y - z \\ x - 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ (13.45.1).

ಈಗ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ಎಂದು ಒರಿದರೆ, (13.45.2) ನ್ನು

$$AX = B \qquad (13.45.3)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ $|A| \neq 0$ ಇರುವುದರಿಂದ A^{-1} ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(13.45.3)ರ ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನು A^{-1} ದಿಂದ ಹಿಂಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow I_3X = A^{-1}B$$

$$\therefore \quad X = A^{-1} B.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಬಹುದು.

$$\therefore \quad X = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2,\ y = 1,\ z = -1.$$

ಮೇಲಿನಂತೆ ಪಡೆದ A ಮಂಡಲವನ್ನು (13.45.1)ರ **ಗುಣಾಂಕ ಮಂಡಲ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. **ಗುಣಾಂಕ ಮಂಡಲದ** ಪ್ರತಿಲೋಮವು ದೊರೆಯುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ತಂಡವನ್ನು, ಮೇಲಿನಂತೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

13.46 **ಟೀಕೆ :** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

ಮತ್ತು $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$|A| = -2 \neq 0$ ಇರುವುದರಿಂದ A^{-1} ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$AX = B \quad \ldots\ldots \quad (13.46.1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y + 2z = b_1$$

$$x + 2y + 3z = b_2$$

$$3x + y + z = b_3$$

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 1 & 2 \\ b_2 & 2 & 3 \\ b_3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \because \; [D = |A|]$$

$$= \frac{b_1 - b_2 + b_3}{2}$$

ಇದೇ ರೀತಿ : $Y = -4b_1 + 3b_2 - b_3.$

$$Z = \frac{5b_1 - 3b_2 + b_3}{2}$$

(13.46.1) ನ್ನು A^{-1} ದಿಂದ ಓಂದಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}\mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}\mathbf{B} \qquad \ldots \qquad (13.46.2)$$

ಆದರೆ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1 - b_2 + b_3}{2} \\ -4b_1 + 3b_2 - b_3 \\ \dfrac{5b_1 - 3b_2 + b_3}{2} \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (13.46.3)$$

(13.46.2) ಮತ್ತು (13.46.3) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.8

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. A ಮತ್ತು Bಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ತನ್ಮೂಲಕ

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ AX ಅನುಷ (A) $= 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, $A = A^{-1}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ. $A^2 = A^4 = A^6 = \dots I_3$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

4. ಕೆಳಗಿನ ಮಂಡಲಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮಗಳು ದೊರೆಯುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.

(i) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$(vi)\ \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ (vii)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(viii)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot (ix)\ \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಂಡಲದ್ವಯಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ವೆಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

$$(i)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(ii)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}:\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $7\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{14} & \frac{31}{28} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\frac{1}{37}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & 16 & 13 \\ 6 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\text{(vii)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ; \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ಮತ್ತು $A = [\ a_{ij}\ ]_{3 \times 3}$.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ $A^{-1} = \dfrac{A - 4 I_3}{5}$

ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

7. $|A| = 0$ ಇರುವಾಗ (i) $AB = AC \Rightarrow B = C$

(ii) $\left| A^{-1} \right| = |A|^{-1}$

(iii) $\left(A^{-1}\right)' = \left(A'\right)^{-1}$

ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{2x-3}$

10. $\dfrac{4}{x+3} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{(x-2)^2}$

20. $\dfrac{-2}{5(x-3)} + \dfrac{-8}{5(x+2)}$

30. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{3x+2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. 55450 ; 30 ; 10 ; 6.5538×10^8 ;
   1.2751×10^8

5. 696 ; 24 ; 7,73,256

10. 30,240

15. 48, 38, 400

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. 495; 4368; 5050; $(2n!) / (n!)^2$

15. ${}_{60}C_6$

20. 610470

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. (i) $1+7x+21x^2+35x^3+35x^4+35x^5+7x^6+x^7$

5. 0.95099

ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

1. (i) 3776.549

ಅಭ್ಯಾಸ : 13.3

ಸೂಚನೆ : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ರಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು ಮಂಡಲಗಳು ; 8, 9 ಮತ್ತು 10 ಅಲ್ಲ.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. (i) [5]; (v) ಅಮಾನ್ಯ

ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. (i) 5×5 (v) 7×12

ಅಭ್ಯಾಸ 13.4

1. [0], $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, [2, 3, 4], ಇತ್ಯಾದಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 13.6

2. (1) 6; (iv) 135

ಅಭ್ಯಾಸ 13.7

1. $x=-3,\ y=3$

5. $x=5/4,\ y=7/8,\ z=-3/8$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.38

1. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & /2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$

4. (v) $\begin{bmatrix} -6 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ

ಅದಿಶ	Scalar
ಉಪಲಿಪಿ	Subscript
ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Permutation
ಗಣಿತಾನುಮಾನ	Mathematical Induction
ಗುಣಾಂಕಮಂಡಲ	Coefficient Matrix
ನಿರ್ಧಾರಕ	Determinant
ದ್ವಿಪದಪ್ರಮೇಯ	Binomial Theorem
ಮಂಡಲ	Matrix
—ದ ಅನುಪಲ್ಲಟ	— Adjugate
—ದ ಅನುವರ್ತ	— Conjugate
—ದ ಗುಣಲಬ್ಧ	— Product
—ದ ಪಲ್ಲಟ	— Transpose
—ದ ಪ್ರತಿಲೋಮ	— Inverse
—ದಲ್ಲಿ ಸಮತ್ವ	— Equality
—ವಿಷಮಾಂಗ	— Asmmetric
—ಸಮಾಂಗ	— Symmetric
ಮಾನ್ಯ	Compatible
ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ	Linear Equation
ಮೂಲಾಂಶ	Element

ಒಪ್ಪೋಲೆ

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
1	1	$a^{n-1}x$	$a_{n-1}x$
3	5	$\frac{A}{(ax+b)^k}$	$\frac{A_k}{(ax+b)^k}$
12	2	ಕೊಂಡು	ಕೊಡುವ
13	3	$1\in S\subset N$	$p\in s$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಅಂದರೆ
23	ಚಿತ್ರ 11.6.1	r—1 n	r—1 r
24	20	....n ಅಪವರ್ತನಗಳು $= n^n$ —	.... r ಅಪವರ್ತನಗಳು
25	18	ಹೇಗೆ (iii)	ಹೀಗೆ (iii)
	18	ಭವಮಾಡಿದ	ಮಾಡಿದ
27	17	(iii)	(iii)ರಲ್ಲಿ
33	27	ಯಾವ	ಯಾದ
34	19	11.13	11.13ಅ
38	11	11.15.1	(11.15.1)
	17	ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ n	ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r
40	15	${}_nC_1$ n—6	${}_nC_{n-6}$
45	10	$1a^{1-0}b^0+$	$1a^{1-0}b^0+$
45	16	$\sum_{r=0}^{2} 2_2C_r\ a^{2-r}b^r$	$\sum_{r=0}^{2} {}_2C_r\ a^{2-r}b^r$
46	12	${}_nC_n\ a^{n-n}b^r$	${}_nC_n\ a^{n-n}b^n$
48	3,6	(12.2.1¹)	(12.2.1)
	15	a(a + b)p	$a(a+b)^p$
	16	b(a + b)p	$b(a+b)^p$
	17	$\sum\ {}_pC_r\ a^p\ {}^r b, b_r$	$=\sum_{r=0}^{p} {}_pC_r\ a^{p-r}bb^r$
	17	$\sum C_r a^{p-r}\ b^{r+1}$	$=\sum {}_pC_r a^{p-r}\ b^{r+1}$

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
49	5	$\sum_{r=1}^{p} p$	$\sum_{r=1}^{p} \{$
51	14	${}_6C_0(x)^0(2y)^6$	${}_6C_0(x)^{6-0}(2y)^0$
52	11	${}_5C_4\sqrt{2}^{\,2}$	${}_5C_4\sqrt{2}$
	21	$4C_1 \times 1 \times {}^{4-}\ (0.08))^1$	${}_4C_1 \times 1^{4-1} \times (0.08)^1$
53	9	$\left(\frac{1}{2x}\right)$	$\left(\frac{1}{2x}\right)^r$
	18	$\left(\frac{1}{2x}\right)$	$\left(\frac{1}{2x}\right)^r$
59	14	$\begin{matrix}>\\=\\>\end{matrix}\ 1$	$\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\ 1$
	15	$\begin{matrix}>\\=\\>\end{matrix}\ 3r$	$\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\ 3r$
	16	$\begin{matrix}>\\=\\>\end{matrix}\ 4r$	$\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\ 4r$
60	1	$\frac{t_{r+1}}{t_r} \Leftrightarrow$	$\frac{t_{r+1}}{t_r} \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 1 \Leftrightarrow$
54	1	$(-1)^r,\ {}_{12}C_r\ {}_1 4^{12-r}\ x^{3(12-r)} \frac{1}{2^r\ x^r}$	$(-1) \times {}_{12}C_r\ 4^{12-3r}\ x^{3(12-r)} \frac{1}{2^r\ x}$
	2	$,12C_r$	$\times {}_{12}C_r$

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
54	8	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^3}$
	12	$(-1)^t$	$(-1)^r$
55	2	,	x
58	13	${}_nC_r$	${}_nC_3$
	18	$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-8}} \cdot x$	$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}} \cdot x$
59	19	$\frac{(-r+1)}{r}$	$\frac{(n-r+1)}{r}$
	17	$9 \overset{<}{\underset{<}{=}} 4r$	$9 \overset{>}{\underset{<}{=}} 4r$
61	4	${}_2C_0+{}_2C_2+{}_2C_4+ \ldots$	$2C_0+2C_2+2C_4+\ldots$
62	13	$(-1)^{n-1}\ {}_nC_n$	$(-1)^{n-1}\ nC_n$
	14	$= - \left\{ \frac{n-2n(n-1)}{1.2} + \right.$	$= - \left\{ n - \frac{2n(n-1)}{1.2} + \right.$
	16	$+ (-1)^{r-1}$	$+ (-1)^{n-1}n$
64	5	$C_{n+1}\ x^{r+1}$	$C_{r+1}\ x^{r+1}$
70	6	a_{35}	a_{34}
	7	$a_{ij} = i \quad j$	$a_{ij} = i+j$
71	4	$\sqrt{1} + 1 = 2$	$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
	5	$\sqrt{12}\ \sqrt{32}\ \sqrt{5}\quad 9$	$\sqrt{2}\ \sqrt{3}\ 2\ \sqrt{5}$
	6	a_{jj}	a_{ij}
74	5	$A \times B$	$A \neq B$
75	10	$[\ 2a_{ji}\ ]$	$[\ 2a_{ij}\ ]$
	11	$[\ a_{ji}\ ]$	$[\ a_{ij}\ ]$

ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
3	$[1\times(2)+2(3)+(-4)]=-4$	$[1(2)+2(2)+3(-4)]=[-4]$
6	$[a_{j1}\ a_{i2}\ ..\ a_{in}]$	$[a_{i1}\ a_{j2}\ ....a_{jn}]$
7	$[a_{i1}\ b_{1k}=a_{i2}\ b_{2k}+....+a_{in}\ b_{nk}]$	$[a_{i1}\ b_{1k}+a_{i2}\ b_{2k}+..+a_{in}\ b_{nk}]$
7	$[a_{1i}\ a_{i2}\ ....a_{in}]$	$[a_{i1}\ a_{i2}\ ....\ a_{in}]$
6	$=[\sum_{j=1}^{n} a_{i.}\ b_{ik}]$	$[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk}]$
2	$C_{11}\ ....\ ....\ C_{11}$	$C_{11}\ ....\ C_{1p}$
3	$C_{1i}\ \boxed{C_{ik}}\ C_{i}$	$C_{i1}\ \boxed{C_{ik}}\ C_{ip}$
2	$A\times B$	$B\times A$
2	ಮಂಡಲಗಳ ಗುಣದಲ್ಲಿ	ಮಂಡಲಗಳ ಗಣದಲ್ಲ
15	$(i)=Y[34\ 15]$	$Y=[3\ 4\ 1\ 5]$
11	$=\delta_{i1}\ \delta_{i2}....\delta_{in}$	$\{\delta_{i1}\ \delta_{i2}\ \ \delta_{in}\}$
12	$....+\delta_{ii}\ a_{ij}\ ....$	$....+\delta_{ij}\ a_{ij}\ +....$
5	$(A')=$	$(A')'$
6	$=a'_{ij}$	$=a'_{ji}$
6	$A=a_{ij}$ ([(*)ದಿಂದ])	A
9	$[\sum_{j=1}^{n} a_{ki}\ b_{i.}]$	$[\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\ b_{ji}$
9	ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ a_{ji}	ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ a_{ij}
8	ಮಂಡಲಗಳನ್ನು	ಮಂಡಲಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಮಂಡಲಗಳನ್ನು

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
103	21	a_{ji} ದ	a_{ij} ದ
104	6	AB	$\overline{AB}$
	10	ಇದನ್ನು $\overline{A'}$	$\overline{A}'$
105	7	$\bar{A}+B$	$\overline{A}+\overline{B}$
	1	$[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk}\ )]_{m\times p}$	$[\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk}\ )}]$
106	9	$[\overline{a}'_{ji}\ ]_{nXm}$;	$[\overline{a_{ij}}\ ]_{nXm}$;
107	2	$\begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2-i & 1+i3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2-i & 1+i3 \end{bmatrix}$
	9	$[\overline{a}_{ij}\ ]_{nXn}$	$[\bar{a}_{ij}'\ ]_{nXn}$
109	11	$\overline{A\ B}=-\overline{A}-\overline{B}$	
117	3	$=\sum_{m=1}^{n} a_{mi}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{pi}$
	6	$\sum_{j=1}^{r} a_{ji}$	$\sum_{j=1}^{r} a_{ii}$
121	4	$-a_{12}\triangle(\propto^{12})$	$-a_{12}\triangle(\propto_{12})$
127	2	$=\|\ p\quad p\quad q\ \|$	$=\|\ p\quad P\quad p\ \|$
130	3	$\|A\|=a_{1j}$	$\|A\|=(a_{ij}\ )$
	11	;$a_{i2}\ =a_{i2}\ \cdots,\ a_{in}$ $=a_{in}$	$a_{i2}=a_{i2}\ ,\ldots,$ $a_{in}\ =a_{in}$
	12	$+\ \ldots\ +\ a_{in}\ A_{in}$	$+\ \cdots\ +\ a_{jn}\ A_{jn}$
	15	$[\ \because\ R\equiv R_j\ \ ]$	$[\because\ R_i\ =\ R_j\ ]$
	4	$+a_{2j}\ aA_{2j}\ +$	$+\ a_{2j}\ A_{2j}$
	6	$+\ \ldots\ +\ a_{in}\ A_{in}\ =$	$+\ \ldots\ +\ a_{jn}\ A_{jn}\ =$
	16	$a_{2i}\ A_{2i}\ +\ \ldots a_{ni}\ A_{ni}$	$a_{2i}\ A_{2j}\ +\ldots a_{ni}\ A_{nj}$

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
130	16	$\begin{cases} \lvert A\rvert =, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert A\rvert, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$
154	2	D_x	DX
155	11	$Z = \frac{D_x}{D}$	$Z = \frac{D_z}{D}$
	8	D_2	D_z
	10	$d_z = 2$	$d_2 = 2$
156	17	x, y, z ಗಳನ್ನು	x, y ಗಳನ್ನು
160	19	$A A^{-1} = A\lvert A^{-1} = I_n$	$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n$
165	1	ಇಲ್ಲಿ A'_{ki}	ಇಲ್ಲಿ A'[illegible]

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8077	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	9579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	0175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9115	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7508	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7688	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

ಆಧಾರ ಗ್ರಂಥಗಳು

1. Alwin K.Bettinger & John A. England. **Algebra and Trigonometry**. Secration ; International Text Book Co. 1963.

2. Barnard S. and Child J. M. **Higher Algebra** London : Macmillain and Co. Ltd., 1965.

3. Hall H. S. & Knight S. R., **Higher Algebra.** London: Macmillan & Co., Ltd., 1946.

Myra McFadden,, **Sets Relations and Functions.** Newyork: McGraw - Hill Book Co., Inc., 1963.

5. Pavate, D. C.; **Modern Algebra for P. U. C. Classes.** Madras: Macmillan & Co., 1969.

6. Rees and Sparks, **Intermediate Algebra.** Toronto: McGraw- Hill Book Co., Inc., 1937.

7. Richard V. Andree., **Selection from Modern Abstract Algebra.** Chicago: Holt Rinehart & Winston., 1963.

8. Robert L Swain., **Understanding Arithmatic.** New York: Holt Rinehart and Winston, 1957.

9. Ross P., **Elementary Algebra (Part II).** Madras: Orient Longmans, 1963.

10. Dr. Sampathkumar., **A Text Book of Mathematics for first year P. U. C.,** Hubli: Book Centre, 1971.

11. *Seymour Lipschutz*., **Set theory and related topics**. New York: Schaum Publishing Co., 1964.

12. Shah N. M. and Desai C. M., **College Algebra**. Surath Karsondas Narandas and Sons, 1954.

13. Shah K. N. & Rev. Fr. G. G. valles., **College Algebra**. Anand. Charotar Book Stall, 1964.

14. —., **P.U.C. Mathematics, Part I. Algebra & Elementary Calculus.** Bangalore University, 1971.

15. ಅಮೂರ ಕೆ. ಎಸ್. ಮತ್ತು ಇತರರು.,
ಬೀಜಗಣಿತ-ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ.
ಧಾರವಾಡ : ಕರ್ನಾಟಕ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1969.

16. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ ವಿ. ಕೆ., **ಬೀಜಗಣಿತ.**
ಮೈಸೂರು : ಮೈಸೂರ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1958.

17. ಪ್ರಾಣೇಶರಾವ್ ಪಿ. ಆರ್., **ಬೀಜಗಣಿತ.**
ಮೈಸೂರು : ಬೆಂಗಳೂರು ಮುದ್ರಣಾಲಯ, ಮೈಸೂರು ವಿಭಾಗ, 1958.

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
1.	ಸುಭಿಕ್ಷತೆಗೆ ತೆರೆದ ಬಾಗಿಲು (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	2-50	
2.	ಪೀಡೆ ನಿರ್ವಹಣೆ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	7–50	
3.	ಕೀಟ ವಿಂಗಡಣೆ	15-00*	
4.	ಕೀಟ ಹತೋಟಿ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	6–25	
5.	ಸಾಕು ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ–1	12–50	
6.	ತರಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ	12–50	
7.	ಕೃಷಿ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಶಬ್ದಾರ್ಥ ನಿರೂಪಣಾವಳಿ	5–00	6–25*
8.	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಕೈಪಿಡಿ	18–00	19–00
9.	ರೈತರ ನೆಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಿನ ಮರಗಳು	18–00	19–00
10.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ-2	11–25	15–00
11.	ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ	15-00	20-00
12.	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ನಿರ್ವಹಣೆ	15-00	19-00*
13.	ಮಣ್ಣು	11-25	15-00*
14.	ಕೃಷಿ ಸಹಕಾರ	6-25	10-00*
15.	ಕಳೆಗಳು ಮತ್ತು ಕಳೆಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	15-00	19-00*
16.	ಗೋಸಂಪತ್ತು	6-25	10-00*
17.	ಧಾನ್ಯದಾಸ್ತಾನು ತತ್ವ ಮತ್ತು ಪದ್ಧತಿಗಳು	7-50	11-25
18.	ಮಣ್ಣಿನ ಫಲವತ್ತತೆ ಹಾಗೂ ಉತ್ಪಾದಕತೆ	17-50	21-25*
19.	ಪಶುವೈದ್ಯಕೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	6-00	16-00
20.	ಹೊಲದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೆಲವು ಕೀಟಗಳು	8-25*	12-00*
21.	ಟ್ರ್ಯಾಕ್ಟರು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಸುಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿಡುವ ಕ್ರಮಗಳು	7-50*	12-50*
22.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ–3	10-00	15-00
23.	ಕೃಷಿ ವಿಸ್ತರಣ ಶಿಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿಗಳು	11-25*	16-25*
24.	ಕಣಜದ ಪೀಡೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	15-00	19-00
25.	ಸಸ್ಯವರ್ಗೀಕರಣಶಾಸ್ತ್ರ	15-00	20-00
26.	ಪೌಷ್ಟಿಕ ಆಹಾರ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	6-00	16-00

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
27.	ಕಡಲ ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	5-00	10-00
28.	ಧಾನ್ಯದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-75*	
29.	ಕಬ್ಬಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	4-50*	
30.	ಶಿಶುವಿಹಾರ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	6-00	
31.	ಬೇಳೆಕಾಳು ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	7-50*	
32.	ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮೀಕ್ಷಣೆ	9-50	14-00
33	ಇಲಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	9-50	13.25
34.	ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	21-50	
35.	ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	16-25*	
36.	ಕ್ಯಾನಿಂಗ್–ಆಹಾರ ಜೋಪಾಸನೆಯ ಒಂದು ಆಧುನಿಕ ವಿಧಾನ	16-25	21-25
37.	ಅಲಂಕಾರ ಸಸ್ಯಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-75	
38.	ಜೀವಕೋಶಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜೀವರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	25-00
39.	ಎಲುಬುಶಾಸ್ತ್ರ	11-25	16-25
40.	ಕಡಲೆಕಾಯಿ	10-00*	15-00
41.	ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ, ಭಾಗ–1	25-00	30-00
42.	ತೆಂಗು, ಅಡಕೆ, ಇತರ ಗರಿಮರಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	9-00*	
43.	ಪ್ಲಾಂಟೇಶನ್ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	12-00	
44.	ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಕೋಳಿ ಸಾಕಾಣೆ	22-50	27-50
45.	ಕಲ್ಲುನಾರು (ಭೂತಾಳಿ) ಗಿಡಗಳು	5-00	

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
46.	ಎಣ್ಣೆಬೀಜ(ಕಾಳು)ಗಳ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	7-50	
47.	ಹತ್ತಿ(ನೂಲು)ಹಾಗೂ ನಾರಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-00	
48.	ಹಸುರೆಲೆ ಗೊಬ್ಬರ, ಮೇವು ಹಾಗೂ ಉಪ್ಪುನೇರಳೆ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	5-00*	
49.	ಮಾದಕ(ಹೊಗೆಸೊಪ್ಪು, ಗಾಂಜ) ಮತ್ತು ಸಂಬಾರ(ಅರಿಶಿನ ಇತ್ಯಾದಿ) ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	3-75	
50.	ಕೃಷಿ ಉಪಯೋಗಿ ಕೆಲವು ವೃಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	4-50	
51.	ಸಸ್ಯಸಾಮ್ರಾಜ್ಯ	25-00	30-00
52.	ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	15-00	-10 00
53.	ಭಾರತೀಯ ಗ್ರಾಮೀಣ ಯುವಕ ರೈತ ಸಂಘಗಳ ಸಂಘಟಣೆ	8-25	13-25
54.	ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ, ಭಾಗ–2	20-00	25-00
55.	ಸಾವಯವ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ	14-00	19-00
56.	ಪಶುರೋಗಗಳು ಮತ್ತು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆರೋಗ್ಯ	15-50	17-50
57.	ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಜೇನುಸಾಕಣೆ	20-00	25-00
58.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿ ಮೂಲದ ಸೋಂಕುರೋಗಗಳು	7-50	12-00
59.	ದೊಡ್ಡರೋಗ	5-00	
60.	ಮೂಲ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ	19-00	24-00
61.	ಜೇನುಸಾಕಣೆ	17-50	22-50
62.	ಕೃಷಿರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	3-25	
63.	ಮಣ್ಣು ನಿರ್ವಹಣೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ ಹಾಗೂ ಬೆಳೆ ಉತ್ಪಾದನೆ	20-00	25-00
64.	ಕೃಷಿ ಅನಿಲಯಂತ್ರ ಹಾಗೂ ಟ್ರ್ಯಾಕ್ಟರುಗಳು		60-00

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
65.	ಸಹಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ	18-00	23-00
66.	ಕೋಶ	20-00	25-00
67.	ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟ ನಿಯಂತ್ರಣ	12-50	19-00
68	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	25-00
69.	ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ರೂಪಿಕೆಗಳು	17-00	22-00
70.	ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ	30-00	35-00
71.	ಹುಲಿ-ಭಾರತದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮೃಗ	20-00	24-00
72.	ನೀರಾವರಿ ತತ್ವ ಹಾಗೂ ಪದ್ಧತಿಗಳು	45-00	50-00
73.	ಮಣ್ಣು ಶಿಲೀಂಧ್ರ ಕೈಪಿಡಿ	45-00	50-00
74.	ಪ್ರಾಣಿಗಳ ವರ್ತನೆ	17-00	22-00
75.	ಬೆಳೆ ಕೀಟಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		125-00
76.	ಸಸ್ಯತಳಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ವಿಧಾನಗಳು		60-00
77.	ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	17-00	22-00
78.	ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಗಳಿರುವ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳು (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ–1)	8-50	
79.	ಕೆಲವು ಸಸ್ಯಗಳ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕುಟುಂಬ, ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಹಾಗೂ ಕನ್ನಡ ಹೆಸರುಗಳು	15-00	20-00
80.	ಮೀನು ಮತ್ತು ಇತರ ಸಾಗರೋತ್ಪನ್ನ ಆಹಾರಗಳ ಶೀತಜೋಪಾಸನೆ	20-00	25-00
81.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಕೀಲು ಮತ್ತು ಸ್ನಾಯುಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	25-00
82.	ಕುರಿಸಾಕಣೆ	8-00	13-00
83.	ಜೋಳ	10–00	15-00
84.	ಹಂದಿಯ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ	35-00	40-00
85.	ಆಧುನಿಕ ಹೈನುಗಾರ ದನಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆ	25-00	30-00
86.	ದಾಸ್ತಾನು ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	8-00	
87.	ಮನೆ ಕೀಟಗಳು ಇತರ ಪೀಡೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-00	

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
88.	ಜಾನುವಾರು ಮತ್ತು ಮನುಷ್ಯರಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10-00	
89.	ತೆಂಗಿನ ಬೇಸಾಯ	9-00*	14-00*
90.	ಆಹಾರ ರಕ್ಷಣೆ ಮತ್ತು ಕೆಡುವಿಕೆಯ ತತ್ವಗಳು (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಗ-2)	11-00	
91.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಹಾಗೂ ವಿಧಾನಗಳು (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು, ಭಾಗ-1)	17-00	
92.	ಕೃಷಿ ಸಸ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	2-00	
93.	ಹಸುರು ಸಸ್ಯದ ಜೀವನ	12-00	17-00
94.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳ ಚಯಾಪಚಯ (ಜೀವದ್ರವ್ಯ ಪರಿಣಾಮ) ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ರಚನೆ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಯ ಸಂಬಂಧ(ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು ಭಾಗ-2)	18-00	
95.	ವಿವಿಧ ಆಹಾರಗಳು ಕಲುಷಿತವಾಗುವಿಕೆ ಕೆಡುವಿಕೆ ಮತ್ತು ರಕ್ಷಣೆ (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಗ-3)	15-00	
96.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳಿಂದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದ ಕಿಣ್ವಗಳು ಮತ್ತು ಆಹಾರಗಳು (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ-4)	7-00	
97.	ರೋಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆಹಾರಗಳು (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ-5)	5-00	
98.	ಆಹಾರದ ನೈರ್ಮಲ್ಯ ಹತೋಟಿ ಮತ್ತು ಪರೀಕ್ಷೆ (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ-6)	7-00	
99.	ಕೃಷಿ ಕರ್ನಾಟಕ	12-50	17-50
100.	ದಾಸ್ತಾನು, ಮನೆ ಜಾನುವಾರು ಹಾಗೂ ಮನುಷ್ಯರಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	35-00	
101.	ಮತ್ಸ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ	50-00	
102.	ಹಣ್ಣು ಮತ್ತು ತರಕಾರಿ ಸಂರಕ್ಷಣೆ	35-00	40-00
103.	ಫಾರ್ಮ್ ನಿರ್ವಹಣೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ		40-00

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
104.	ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ		62-50
105.	ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾಜಿಕ ಅರಣ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ	25-00	35-00
106.	ಬತ್ತದ ಬೇಸಾಯ	15-00	25-00
107.	ಧಾನ್ಯದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ರೋಗಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	12-00	17-00
108.	ವ್ಯವಸಾಯ ಮುನ್ನಡೆ	18-00	28-00
109.	ಕೀಟಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	3-50	
110.	ಸಚಿತ್ರ ಬತ್ತದ ಬೆಳೆ	12-00	22-50
111.	ಕೋಳಿಸಾಕಣೆ ಕೈಪಿಡಿ	9-00	19-00
112.	ಮಣ್ಣು ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಶಾಸ್ತ್ರ	10-00	20-00
113.	ಭೂಸಾರ ಸಂರಕ್ಷಣೆ	7-50	10-00
114.	ಬಿಳಿಕಸ	9-00	19-00
115.	ವೈರಸ್‌ಗಳು (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು ಭಾಗ-3)	7-50	
116.	ಸಂತಾನೋತ್ಪತ್ತಿ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	20-00	30-00
117.	ಲವಂಗ	3-00	
118.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪರಿವರ್ತನೆ ಹಾಗೂ ಅನುವಂಶೀಯ ಗುಣಗಳ ಪುನರ್ ಸಂಯೋಜನೆ (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು,ಭಾಗ-4)	15-00	
119.	ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮತ್ತು ವಿವರಣೆ (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು, ಭಾಗ-5)	25-00	
120.	ಎಣ್ಣೆಕೊಡುವ ಕೆಲವು ಹೊಸ ಸಸ್ಯಗಳು	12-00	22-00
121.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳ ಪರಿಸರಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸೋಂಕು ರಕ್ಷಣಾ ಶಾಸ್ತ್ರ (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು, ಭಾಗ-6)	20-00	
122.	ಕೃಷಿ ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಉಪಕರಣಗಳು		80-00
123.	ಸಸ್ಯಪೋಷಕಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪಾತ್ರ	10-00	20-00
124.	ಮೆಣಸು-ಕಪ್ಪು ಹೊನ್ನು	9-00	19-00
125.	ಮಾನವ ಕಲ್ಯಾಣಕ್ಕಾಗಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳ ಬಳಕೆ (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು,ಭಾಗ-7)	5-00	

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
126.	ಕೃಷಿ ಆರ್ಥಿಕ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ	25.00	35-00
127.	ರೇಷ್ಮೆ ವ್ಯವಸಾಯ	20-00	30-00
128.	ಕೃಷಿ ಪ್ರಸರಣೆ	25-00	35-00
129.	ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟ ನಿಯಂತ್ರಣ	12-00	35-00
130.	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	15-00	25-00
131.	ಬಿದಿರು ಮತ್ತು ಬೆತ್ತ	10-00	20-00
132.	ಬತ್ತದಬೆಳೆ ಕೀಟನಿಯಂತ್ರಣ	6-00	40-00
133.	ಇಪ್ಪತ್ತೊಂಬತ್ತನೆಯ ದಿನ	20-00	30-00
134.	ಮಣ್ಣಿನ ಭೌತಿಕ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು	20-00	30-00
135.	ಆಧುನಿಕ ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ.		70-00
136.	ಸುಗಂಧದ್ರವ್ಯ ಸಸ್ಯಗಳು	12-50	22-50
137.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು	ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ	
138.	ಜೀವಿಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ		2-50
139.	ಪ್ಲಾಂಟೇಶನ್ ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟ ನಿಯಂತ್ರಣ	,,	
140	ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಬೇಸಾಯ	ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ	
141.	ಪ್ರಾಚೀನ ಅರ್ವಾ ಚೀನ ದನಗಳ ಇತಿಹಾಸ	,,	
142	ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ–2)	20-00	30–00